

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2025 (épreuve officielle RS 26F)

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Vous devez justifier les résultats. Barème : 4 + 4 + 8 + 4 points.

Suites numériques

Exercice 1 (4 points). On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{7}u_n + \frac{6}{7}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \geq 1$. (0,5 pt)
(b) Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{6}{7}(1 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que (u_n) est une suite décroissante. (0,75 pt)
3. On pose : $v_n = u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
(a) Calculer v_0 . (0,25 pt)
(b) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{7}$. (0,5 pt)
(c) Exprimer v_n en fonction de n . (0,5 pt)
(d) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{1}{7}\right)^n + 1$. (0,25 pt)
(e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 2 (4 points). Une boîte contient dix boules indiscernables au toucher : quatre boules blanches portant les numéros 1, 1, 1, 2 et six boules noires portant les numéros 1, 1, 1, 1, 1 et 2.

On tire simultanément au hasard deux boules de la boîte.

On considère les deux événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont noires »

B : « Les deux boules tirées portent le même numéro »

1. Calculer C_{10}^2 . (0,5 pt)
2. Calculer $p(A)$. (0,5 pt)
3. Montrer que $p(B) = \frac{29}{45}$. (0,75 pt)
4. Montrer que $p(A \cap B) = \frac{10}{45}$. (0,75 pt)

5. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules noires tirées.

[Tableau : $x_i : 0, 1, 2$; $p(X = x_i) : \dots, \dots, \frac{15}{45}$.]

(a) Copier et compléter le tableau ci-contre en justifiant les réponses. (1 pt)

(b) Vérifier que $E(X) = \frac{54}{45}$ ($E(X)$ est l'espérance mathématique de X). (0,5 pt)

Étude d'une fonction numérique

Exercice 3 (8 points). On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (\ln x - 1)^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis donner une interprétation géométrique. (1 pt)

2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5 pt)

(b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$). (0,5 pt)

(c) Donner une interprétation géométrique du résultat. (0,5 pt)

3. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (1 pt)

(b) Étudier le signe de $(\ln x - 1)$ sur $]0, +\infty[$. (1 pt)

(c) Montrer que f est décroissante sur $]0, e]$ et qu'elle est croissante sur $[e, +\infty[$. (1 pt)

4. (a) Montrer que $f''(x) = \frac{2(2 - \ln x)}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (1 pt)

(b) En déduire que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. (1,5 pt)

Calcul intégral

Exercice 4 (4 points). Dans la figure ci-dessous, (C) est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)e^x$.

[Figure : la courbe (C) est croissante sur $] -\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$; elle admet un maximum au point $(0, 1)$, tend vers 0 en $-\infty$ (l'axe des abscisses est asymptote), coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 puis décroît rapidement vers $-\infty$ (elle est déjà en dessous de -2 avant $x = 2$). La partie hachurée est le domaine situé sous (C) et au-dessus de l'axe des abscisses, entre les droites $x = 0$ et $x = 1$.]

1. À partir du graphique ci-dessus, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse (aucune justification n'est demandée) :

A. « L'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ » (0,5 pt)

B. « L'inéquation $g(x) \geq 2$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ » (0,5 pt)

C. « Pour tout x de $] -\infty, 0]$, $g'(x) \leq 0$ » (0,5 pt)

D. « On a : $g([0, 1]) = [0, 1]$ » (0,5 pt)

2. (a) Calculer $\int_0^1 e^x dx$. (0,5 pt)

(b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 xe^x dx = 1$. (0,75 pt)

(c) En déduire l'aire de la partie hachurée. (0,75 pt)