

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2025 (épreuve officielle RS 26F)

Suites numériques

Solution 1.

- $u_1 = \frac{1}{7}u_0 + \frac{6}{7} = \frac{2}{7} + \frac{6}{7} = \frac{8}{7}$ et $u_2 = \frac{1}{7}u_1 + \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \times \frac{8}{7} + \frac{6}{7} = \frac{8}{49} + \frac{42}{49} = \frac{50}{49}$. Donc $u_1 = \frac{8}{7}$ et $u_2 = \frac{50}{49}$.
- (a) Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \geq 1$.
Initialisation : $u_0 = 2 \geq 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 1$. En multipliant par $\frac{1}{7} > 0$: $\frac{1}{7}u_n \geq \frac{1}{7}$, puis en ajoutant $\frac{6}{7}$: $u_{n+1} = \frac{1}{7}u_n + \frac{6}{7} \geq \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1$.
Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
 (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{7}u_n + \frac{6}{7} - u_n = -\frac{6}{7}u_n + \frac{6}{7} = \frac{6}{7}(1 - u_n)$. D'après (a), $u_n \geq 1$ donc $1 - u_n \leq 0$ et, comme $\frac{6}{7} > 0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante.
- (a) $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$.
 (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{7}u_n + \frac{6}{7} - 1 = \frac{1}{7}u_n - \frac{1}{7} = \frac{1}{7}(u_n - 1) = \frac{1}{7}v_n$. Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{7}$ et de premier terme $v_0 = 1$.
 (c) $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n = \left(\frac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 (d) $v_n = u_n - 1$ donc $u_n = v_n + 1 = \left(\frac{1}{7}\right)^n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 (e) Comme $-1 < \frac{1}{7} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 + 1 = 1$.

Calcul des probabilités

Solution 2.

- $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$.
- On tire simultanément 2 boules parmi 10 : les 45 combinaisons sont équiprobables (boules indiscernables au toucher), $\text{card}(\Omega) = 45$.
 A : les deux boules sont choisies parmi les 6 noires : $\text{card}(A) = C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$. Donc $p(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.
- Les boules portant le numéro 1 sont au nombre de $3 + 5 = 8$ (3 blanches et 5 noires) ; celles portant le numéro 2 sont au nombre de $1 + 1 = 2$ (1 blanche et 1 noire). B est réalisé si les deux boules portent toutes deux le numéro 1 ou toutes deux le numéro 2 : $\text{card}(B) = C_8^2 + C_2^2 = \frac{8 \times 7}{2} + 1 = 28 + 1 = 29$. Donc $p(B) = \frac{29}{45}$.
- $A \cap B$: les deux boules sont noires et portent le même numéro. Parmi les noires, 5 portent le numéro 1 et une seule porte le numéro 2 (on ne peut donc pas tirer deux noires numérotées 2) : $\text{card}(A \cap B) = C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$. Donc $p(A \cap B) = \frac{10}{45}$.

5. (a) X prend les valeurs 0, 1, 2.

($X = 0$) : aucune boule noire, les deux boules sont blanches (parmi 4) : $p(X = 0) = \frac{C_4^2}{45} = \frac{6}{45}$.

($X = 2$) : les deux boules sont noires, c'est l'événement A : $p(X = 2) = \frac{15}{45}$.

($X = 1$) : une boule blanche (parmi 4) et une boule noire (parmi 6) : $p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{45} = \frac{4 \times 6}{45} = \frac{24}{45}$. (Vérification : $\frac{6}{45} + \frac{24}{45} + \frac{15}{45} = \frac{45}{45} = 1$.)

Tableau complété : $x_i : 0, 1, 2$; $p(X = x_i) : \frac{6}{45}, \frac{24}{45}, \frac{15}{45}$.

(b) $E(X) = 0 \times \frac{6}{45} + 1 \times \frac{24}{45} + 2 \times \frac{15}{45} = \frac{24}{45} + \frac{30}{45} = \frac{54}{45}$ (soit $\frac{6}{5} = 1,2$).

Étude d'une fonction numérique

Solution 3.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1) = -\infty$ et, en élevant au carré, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1)^2 = +\infty$.

Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C_f) .

2. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Pour $x > 0$: $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 1$, donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$. On admet $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$; on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 - 2 \times 0 + 0 = 0$.

(c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

3. (a) $f = u^2$ avec $u(x) = \ln x - 1$, dérivable sur $]0, +\infty[$, $u'(x) = \frac{1}{x}$. Avec $(u^2)' = 2u'u$: pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x - 1) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$.

(b) $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$; $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 = \ln e \Leftrightarrow x > e$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante) ; et $\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$.

Donc $\ln x - 1$ est négatif sur $]0, e[$, nul en e et positif sur $]e, +\infty[$.

(c) Pour $x > 0$, $\frac{2}{x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $\ln x - 1$: $f'(x) \leq 0$ sur $]0, e[$ et $f'(x) \geq 0$ sur $]e, +\infty[$. Par conséquent f est décroissante sur $]0, e[$ et croissante sur $]e, +\infty[$ (minimum $f(e) = (1 - 1)^2 = 0$).

4. (a) $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2(\ln x - 1)$, $u'(x) = \frac{2}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$. Pour tout $x > 0$: $f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2(\ln x - 1) \times 1}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x + 2}{x^2} = \frac{4 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(2 - \ln x)}{x^2}$.

(b) Pour $x > 0$, $\frac{2}{x^2} > 0$: $f''(x)$ a le signe de $2 - \ln x$. $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$; $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < e^2$; $2 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e^2$.

f'' s'annule en $x = e^2$ en changeant de signe (positive avant, négative après), donc (C_f) admet un point d'inflexion au point d'abscisse e^2 . Son ordonnée est $f(e^2) = (\ln e^2 - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1$.

Le point d'inflexion a pour coordonnées $(e^2, 1)$.

Calcul intégral

Solution 4.

1. Lecture graphique :

A. **Fausse** : la droite horizontale $y = \frac{1}{2}$ coupe la courbe (C) en deux points (un point d'abscisse négative, où (C) monte de 0 vers 1, et un point d'abscisse comprise entre 0 et 1, où (C) redescend de 1 vers 0) ; l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet donc deux solutions.

B. **Vraie** : le maximum de g est $g(0) = 1 < 2$, donc $g(x) \geq 2$ n'a pas de solution.

C. **Fausse** : sur $] -\infty, 0]$ la courbe est croissante, donc $g'(x) \geq 0$ (et non $g'(x) \leq 0$) sur cet intervalle.

D. **Vraie** : sur $[0, 1]$, g est continue et décroissante de $g(0) = 1$ à $g(1) = 0$, donc $g([0, 1]) = [0, 1]$.

2. (a) La fonction $x \rightarrow e^x$ est sa propre primitive : $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

(b) On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$ (fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0, 1]$). Par intégration par parties : $\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx = (1 \times e^1 - 0 \times e^0) - (e - 1) = e - e + 1 = 1$.

(c) Sur $[0, 1]$, $g(x) \geq 0$ (la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, ce que confirme $1 - x \geq 0$ et $e^x > 0$). L'aire de la partie hachurée est donc $\mathcal{A} = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (1 - x) e^x dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x e^x dx = (e - 1) - 1 = e - 2$.

L'aire de la partie hachurée est $(e - 2)$ u.a., soit environ 0,72 u.a.