

Examen national — Corrigé (sujet d'entraînement)

Session normale 2025

Suites numériques et placement financier

Solution 1.

- $C_1 = 50\,000 \times 1,03 = 51\,500$ DH et $C_2 = 51\,500 \times 1,03 = 53\,045$ DH.
- Chaque année le capital est multiplié par 1,03 : $C_{n+1} = 1,03C_n$. (C_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme 50 000, donc $C_n = 50\,000 \times 1,03^n$.
- $C_5 = 50\,000 \times 1,03^5 \approx 50\,000 \times 1,15927 \approx 57\,964$ DH.
- $C_n \geq 70\,000 \Leftrightarrow 1,03^n \geq 1,4 \Leftrightarrow n \ln 1,03 \geq \ln 1,4 \Leftrightarrow n \geq 0, \frac{3365}{0,0296} \approx 11,4$. Le capital dépasse 70 000 DH à partir de la 12^e année.
- Le premier versement est capitalisé 4 ans, le deuxième 3 ans, ... , le cinquième 0 an : $V = 2000(1,03^4 + 1,03^3 + 1,03^2 + 1,03 + 1)$, somme de 5 termes d'une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 1 : $V = 2000 \times \frac{1,03^5 - 1}{1,03 - 1}$. Numériquement $V \approx 2000 \times 0, \frac{15927}{0,03} \approx 10\,618$ DH.

Dénombrement et probabilités

Solution 2.

- $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$ comités.
- $P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$.
- B est l'événement contraire de A : $P(B) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$.
- Deux femmes parmi 7 et un homme parmi 5 : $\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} = 21 \times 5 = 105$ comités. $P(C) = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$.

Étude d'une fonction

Solution 3.

Partie A.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: l'axe des ordonnées est asymptote verticale à (C) .
- $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$; comme $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, la parenthèse tend vers 1 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = -1 - \ln x \rightarrow -\infty$: $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction la droite $y = x$.
4. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.
5. Sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $x - 1$: f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, avec un minimum $f(1) = 0$.
6. Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(1) = 0$, avec égalité seulement en $x = 1$.

Partie B.

1. $f(e) = e - 2$ et $f'(e) = 1 - \frac{1}{e}$: $(T) : y = (1 - \frac{1}{e})(x - e) + e - 2 = (1 - \frac{1}{e})x - 1$.
2. Tracé : asymptote verticale $x = 0$, minimum $(1, 0)$ où la courbe est tangente à l'axe des abscisses, croissance ensuite, branche parabolique de direction $y = x$.

Partie C.

1. $G'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.
2. $\int_1^e \ln x \, dx = G(e) - G(1) = (e - e) - (0 - 1) = 1$.
3. $\int_1^e f(x) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e - 1 = \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - 1 = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}$. Comme $f \geq 0$, c'est l'aire du domaine en unités d'aire ; l'unité d'aire vaut 4 cm^2 , donc l'aire est $2e^2 - 4e - 2 \approx 14,78 - 10,87 - 2 \approx 1,90 \text{ cm}^2$.