

Examen national : Mathématiques (sujet d'entraînement)

Session normale 2025

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 4 + 4 + 12 points. On donne $\ln 1,4 \approx 0,3365$ et $\ln 1,03 \approx 0,0296$.

Suites numériques et placement financier

Exercice 1 (4 points). Une entreprise place un capital de 50 000 DH à intérêts composés au taux annuel de 3%. On note C_n le capital acquis après n années.

1. Calculer C_1 et C_2 .
2. Justifier que (C_n) est une suite géométrique et exprimer C_n en fonction de n .
3. Calculer C_5 (arrondir au dirham).
4. À partir de quelle année le capital dépasse-t-il 70 000 DH ?
5. L'entreprise décide plutôt de verser 2 000 DH à la fin de chaque année pendant 5 ans sur un compte au même taux. Montrer que la valeur acquise juste après le cinquième versement est $V = 2000 \times \frac{1,03^5 - 1}{0,03}$ et la calculer (arrondir au dirham).

Dénombrement et probabilités

Exercice 2 (4 points). Une entreprise compte 12 employés : 7 femmes et 5 hommes. On choisit au hasard un comité de 3 personnes.

1. Combien de comités différents peut-on former ?
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « le comité ne comporte que des femmes ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B : « le comité comporte au moins un homme ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C : « le comité comporte exactement deux femmes ».

Étude d'une fonction

Exercice 3 (12 points). Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie A.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$; interpréter graphiquement.
4. Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{x-1}{x}$.
5. Dresser le tableau de variations de f .
6. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie B.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e .
2. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$.

Partie C.

1. Montrer que la fonction $G : x \rightarrow x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $\int_1^e \ln x \, dx$.
3. En déduire $\int_1^e f(x) \, dx$, puis l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$ (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près, avec $e \approx 2,718$).