

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2024 (épreuve officielle RS 26F)

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Vous devez justifier les résultats. Barème : 5 + 3 + 4 + 8 points.

Suites numériques

Exercice 1 (5 points). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n - 9}{u_n - 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 3$. (0,75 pt)
 (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{4 - u_n}$. (0,5 pt)
 (c) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. (0,25 pt)
 (d) Dire pourquoi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0,25 pt)
3. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$.
 (a) Calculer v_0 . (0,25 pt)
 (b) Montrer que $v_{n+1} = \frac{2u_n - 7}{u_n - 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,5 pt)
 (c) En déduire que $v_{n+1} - v_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,5 pt)
 (d) Montrer que $v_n = \frac{3}{2} + n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,5 pt)
4. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{3v_n - 4}{v_n - 1}$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que $u_n = \frac{6n+1}{2n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,25 pt)
 (c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 2 (3 points). (Les résultats seront donnés sous forme de fractions.)

Pour passer un contrôle oral de mathématiques à ses élèves, un professeur prépare dix exercices de trois domaines comme suit : cinq en algèbre, trois en analyse et deux en géométrie.

Un élève choisit au hasard et simultanément 3 exercices pour passer le contrôle. Tous les **exercices ont la même probabilité d'être choisis**.

On considère les événements suivants :

A : « Le choix de l'élève ne contient que des exercices d'algèbre »

B : « Le choix de l'élève contient un exercice de chaque domaine »

C : « Parmi les trois exercices choisis, il y a un seul de géométrie »

1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{12}$. (1 pt)
2. Calculer $p(B)$. (1 pt)
3. Calculer $p(C)$. (1 pt)

Calcul intégral

Exercice 3 (4 points). On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln x.$$

(C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $f(e)$ et $g(\sqrt{e})$. (0,5 pt)
2. **Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et (C_g) .** (0,5 pt)
3. (a) Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} g(x) dx = \frac{2-\sqrt{e}}{2}$ (on pourra utiliser une intégration par parties). (1 pt)
 (b) Calculer $\int_{\sqrt{e}}^e f(x) dx$. (1 pt)
 (c) **En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ de la partie colorée est $\mathcal{A} = (\sqrt{e} - 1)^2$ u.a.** (On remarquera que $e - 2\sqrt{e} + 1 = (\sqrt{e} - 1)^2$.) (1 pt)

[Figure : dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C_g) de $\ln$ passe par $(1, 0)$ et est croissante ; la courbe (C_f) de $1 - \ln x$ passe par $(1, 1)$ et $(e, 0)$ et est décroissante ; les deux courbes se coupent au point d'abscisse $\sqrt{e}$. La partie colorée est le domaine délimité par (C_g) , (C_f) et l'axe des abscisses : il est situé au-dessus de l'axe des abscisses, sous (C_g) entre $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$, et sous (C_f) entre $x = \sqrt{e}$ et $x = e$.]

Étude d'une fonction numérique

Exercice 4 (8 points). On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = (\ln x)^3 - 3 \ln x$$

et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Vérifier que $h(x) = \ln x((\ln x)^2 - 3)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat. (0,5 pt)
 (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique du résultat. (1,25 pt)
 (On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$.)
2. **Vérifier que l'ensemble des solutions de l'équation $h(x) = 0$ est $\{e^{-\sqrt{3}}, 1, e^{\sqrt{3}}\}$.** (1,5 pt)
3. (a) Montrer que $h'(x) = \frac{3}{x}(\ln x - 1)(\ln x + 1)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (1 pt)
 (b) Montrer que : $h'(x) \geq 0$ sur $]0, \frac{1}{e}] \cup [e, +\infty[$ et $h'(x) \leq 0$ sur $[\frac{1}{e}, e]$. (1 pt)
 (c) Calculer $h(\frac{1}{e})$ et $h(e)$ puis dresser le tableau de variations de h . (1 pt)

4. **À l'aide du tableau de variations de h , donner l'image de chacun des intervalles $I = [\frac{1}{e}, e]$ et $J =]0, +\infty[$ par la fonction h .** (1,5 pt)