

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2024 (épreuve officielle RS 26F)

Suites numériques

Solution 1.

1. $u_1 = \frac{2u_0-9}{u_0-4} = \frac{2-9}{1-4} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$ et $u_2 = \frac{2u_1-9}{u_1-4} = \frac{\frac{14}{3}-9}{\frac{7}{3}-4} = \frac{-\frac{13}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{13}{5}$. Donc $u_1 = \frac{7}{3}$ et $u_2 = \frac{13}{5}$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 3$.

Initialisation : $u_0 = 1 < 3$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 3$. Alors $u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n-9}{u_n-4} - 3 = \frac{2u_n-9-3u_n+12}{u_n-4} = \frac{3-u_n}{u_n-4}$.

Comme $u_n < 3$: $3 - u_n > 0$ et $u_n - 4 < 3 - 4 < 0$, donc le quotient est strictement négatif : $u_{n+1} - 3 < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < 3$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 3$ (en particulier $u_n - 4 \neq 0$ et la suite est bien définie).

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n-9}{u_n-4} - u_n = \frac{2u_n-9-u_n(u_n-4)}{u_n-4} = \frac{-u_n^2+6u_n-9}{u_n-4} = \frac{-(u_n-3)^2}{u_n-4} = \frac{(u_n-3)^2}{4-u_n}$.

(c) Pour tout n : $(u_n - 3)^2 \geq 0$ et $4 - u_n > 0$ (car $u_n < 3 < 4$), donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

(d) (u_n) est croissante et majorée par 3 : d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente.

3. (a) $v_0 = \frac{u_0-4}{u_0-3} = \frac{1-4}{1-3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 4 = \frac{2u_n-9}{u_n-4} - 4 = \frac{2u_n-9-4u_n+16}{u_n-4} = \frac{7-2u_n}{u_n-4}$ et, d'après 2.a, $u_{n+1} - 3 = \frac{3-u_n}{u_n-4}$. Donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-3} = \frac{7-2u_n}{u_n-4} \times \frac{u_n-4}{3-u_n} = \frac{7-2u_n}{3-u_n} = \frac{2u_n-7}{u_n-3}$.

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n-7}{u_n-3} - \frac{u_n-4}{u_n-3} = \frac{2u_n-7-u_n+4}{u_n-3} = \frac{u_n-3}{u_n-3} = 1$.

(d) D'après (c), $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \frac{3}{2}$, donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = v_0 + nr = \frac{3}{2} + n$.

4. (a) Pour tout n : $v_n(u_n - 3) = u_n - 4$, soit $v_n u_n - 3v_n = u_n - 4$, d'où $u_n(v_n - 1) = 3v_n - 4$. Comme $v_n - 1 = \frac{1}{2} + n > 0$, on peut diviser : $u_n = \frac{3v_n-4}{v_n-1} = \frac{3(\frac{3}{2}+n)-4}{\frac{3}{2}+n-1} = \frac{\frac{9}{2}+3n-4}{\frac{1}{2}+n} = \frac{\frac{1}{2}+3n}{\frac{1}{2}+n} = \frac{1+6n}{1+2n} = \frac{6n+1}{2n+1}$ (on a multiplié numérateur et dénominateur par 2).

(b) En remplaçant $v_n = \frac{3}{2} + n$: $u_n = \frac{3(\frac{3}{2}+n)-4}{\frac{3}{2}+n-1} = \frac{\frac{9}{2}+3n-4}{\frac{1}{2}+n} = \frac{\frac{1}{2}+3n}{\frac{1}{2}+n} = \frac{1+6n}{1+2n} = \frac{6n+1}{2n+1}$ (on a multiplié numérateur et dénominateur par 2).

(c) $u_n = \frac{6n+1}{2n+1} = \frac{n(6+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{6+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{6}{2} = 3$.

Calcul des probabilités

Solution 2.

L'élève choisit simultanément 3 exercices parmi 10 : l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 exercices parmi 10, équiprobables : $\text{card}(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$.

1. A est réalisé quand les 3 exercices sont choisis parmi les 5 exercices d'algèbre : $\text{card}(A) = \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$. Donc $p(A) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$.
2. B : un exercice d'algèbre (parmi 5), un d'analyse (parmi 3) et un de géométrie (parmi 2) : $\text{card}(B) = \binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 5 \times 3 \times 2 = 30$. Donc $p(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$.
3. C : un seul exercice de géométrie (parmi 2) et les deux autres parmi les 8 exercices qui ne sont pas de géométrie ($5 + 3 = 8$) : $\text{card}(C) = \binom{2}{1} \times \binom{8}{2} = 2 \times \frac{8 \times 7}{2} = 2 \times 28 = 56$. Donc $p(C) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

Calcul intégral

Solution 3.

1. $f(e) = 1 - \ln e = 1 - 1 = 0$ et $g(\sqrt{e}) = \ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$.
2. Un point $M(x, y)$ appartient à (C_f) et à (C_g) si et seulement si $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $1 - \ln x = \ln x \Leftrightarrow 2 \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Alors $y = g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$. Le point d'intersection de (C_f) et (C_g) est le point de coordonnées $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$.
3. (a) Intégration par parties avec $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$ (fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1, \sqrt{e}]$) : $\int_1^{\sqrt{e}} \ln x \, dx = [x \ln x]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x \times \frac{1}{x} \, dx = (\sqrt{e} \ln \sqrt{e} - 1 \times \ln 1) - [x]_1^{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{2} - 0 - (\sqrt{e} - 1) = 1 - \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{2 - \sqrt{e}}{2}$.
 (b) La fonction $x \rightarrow x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$ (on vérifie : $(x \ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$). Donc une primitive de $f(x) = 1 - \ln x$ est $x - (x \ln x - x) = 2x - x \ln x$: $\int_{\sqrt{e}}^e (1 - \ln x) \, dx = [2x - x \ln x]_{\sqrt{e}}^e = (2e - e \ln e) - (2\sqrt{e} - \sqrt{e} \ln \sqrt{e}) = (2e - e) - \left(2\sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) = e - \frac{3}{2}\sqrt{e}$.
 (c) D'après la figure, la partie colorée est située au-dessus de l'axe des abscisses ; entre $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$ elle est limitée en haut par (C_g) (et $g(x) \geq 0$ sur $[1, \sqrt{e}]$), entre $x = \sqrt{e}$ et $x = e$ elle est limitée en haut par (C_f) (et $f(x) \geq 0$ sur $[\sqrt{e}, e]$ car $\ln x \leq 1$). Donc $\mathcal{A} = \int_1^{\sqrt{e}} g(x) \, dx + \int_{\sqrt{e}}^e f(x) \, dx = \frac{2 - \sqrt{e}}{2} + e - \frac{3}{2}\sqrt{e} = 1 - \frac{\sqrt{e}}{2} + e - \frac{3\sqrt{e}}{2} = e - 2\sqrt{e} + 1 = (\sqrt{e} - 1)^2$.
 L'aire de la partie colorée est $\mathcal{A} = (\sqrt{e} - 1)^2$ u.a. (soit environ 0,42 u.a.).

Étude d'une fonction numérique

Solution 4.

1. (a) Pour tout $x > 0$: $\ln x((\ln x)^2 - 3) = (\ln x)^3 - 3 \ln x = h(x)$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 - 3) = +\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x((\ln x)^2 - 3) = -\infty$.
Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C_h) .
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x)^2 - 3) = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.
 Pour $x > 0$: $\frac{h(x)}{x} = \frac{(\ln x)^3}{x} - 3 \frac{\ln x}{x}$. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$ et on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 0 - 3 \times 0 = 0$.

Interprétation : (C_h) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2. Pour $x > 0$: $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x((\ln x)^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $(\ln x)^2 = 3 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = \sqrt{3}$ ou $\ln x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^{\sqrt{3}}$ ou $x = e^{-\sqrt{3}}$.

L'ensemble des solutions de $h(x) = 0$ est bien $\{e^{-\sqrt{3}}, 1, e^{\sqrt{3}}\}$.

3. (a) h est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Avec $((\ln x)^3)' = 3(\ln x)^2 \times \frac{1}{x}$: $h'(x) = 3\frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{3}{x} = \frac{3}{x}((\ln x)^2 - 1) = \frac{3}{x}(\ln x - 1)(\ln x + 1)$.

(b) Pour $x > 0$, $\frac{3}{x} > 0$: le signe de $h'(x)$ est celui du produit $(\ln x - 1)(\ln x + 1)$.

$\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$; $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$.

Sur $]0, \frac{1}{e}]$: $\ln x + 1 \leq 0$ et $\ln x - 1 < 0$, produit positif : $h'(x) \geq 0$.

Sur $[\frac{1}{e}, e]$: $\ln x + 1 \geq 0$ et $\ln x - 1 \leq 0$, produit négatif : $h'(x) \leq 0$.

Sur $[e, +\infty[$: $\ln x + 1 > 0$ et $\ln x - 1 \geq 0$, produit positif : $h'(x) \geq 0$.

Donc $h'(x) \geq 0$ sur $]0, \frac{1}{e}] \cup [e, +\infty[$ et $h'(x) \leq 0$ sur $[\frac{1}{e}, e]$.

(c) $h(\frac{1}{e}) = (\ln \frac{1}{e})^3 - 3 \ln \frac{1}{e} = (-1)^3 - 3 \times (-1) = -1 + 3 = 2$ et $h(e) = (\ln e)^3 - 3 \ln e = 1 - 3 = -2$.

Tableau de variations de h : h est croissante sur $]0, \frac{1}{e}]$, de $-\infty$ (limite en 0^+) à $h(\frac{1}{e}) = 2$; décroissante sur $[\frac{1}{e}, e]$, de 2 à $h(e) = -2$; croissante sur $[e, +\infty[$, de -2 à $+\infty$ (limite en $+\infty$). Le signe de h' est $+$, 0 , $-$, 0 , $+$ (zéros en $\frac{1}{e}$ et e).

4. **Image de $I = [\frac{1}{e}, e]$:** h est continue et décroissante sur $[\frac{1}{e}, e]$, donc $h(I) = [h(e), h(\frac{1}{e})] = [-2, 2]$.

Image de $J =]0, +\infty[$: d'après le tableau de variations, $h(]0, \frac{1}{e}]) =]-\infty, 2]$ (h continue croissante, de limite $-\infty$ en 0^+), $h([\frac{1}{e}, e]) = [-2, 2]$ et $h([e, +\infty[) = [-2, +\infty[$ (h continue croissante, de limite $+\infty$ en $+\infty$). La réunion de ces trois intervalles est $\mathbb{R}$: $h(J) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.