

Examen national : Mathématiques

Session normale 2024 (épreuve officielle NS 26F)

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Vous devez justifier les résultats. Barème : 5 + 3 + 8 + 4 points.

Suites numériques

Exercice 1 (5 points). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -\frac{5}{3}$. (1 pt)
(b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{5}(u_n + \frac{5}{3})$, puis en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. (0,75 pt)
(c) Dire pourquoi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0,5 pt)
3. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + \frac{5}{3}$.
(a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$. (0,5 pt)
(b) Calculer v_0 . (0,25 pt)
(c) Donner l'expression de v_n en fonction de n . (0,5 pt)
(d) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{20}{3}(\frac{2}{5})^n - \frac{5}{3}$. (0,5 pt)
(e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,5 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 2 (3 points). Une urne contient trois boules vertes numérotées 1 ; 2 ; 3, trois boules rouges numérotées 1 ; 2 ; 3 et trois boules blanches numérotées 1 ; 2 ; 2 (les neuf boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard **trois boules de l'urne**.

On considère les événements suivants :

A : « Les trois boules tirées portent le même numéro »

B : « Les trois boules tirées sont de couleurs deux à deux différentes »

1. Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$. (0,75 pt)
2. Calculer $p(B)$. (0,75 pt)
3. Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{28}$. (0,75 pt)
4. En déduire $p(A \cup B)$. (0,75 pt)

Étude d'une fonction numérique

Exercice 3 (8 points). Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $D =]0, e[\cup]e, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}.$$

1. (a) En remarquant que pour tout $x \neq 1$, $h(x) = \frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}$, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$. (2 pt)
 (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow e^-} h(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow e^+} h(x) = +\infty$. (2 pt)
2. (a) Montrer que pour tout x de D : $h'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$. (1 pt)
 (b) Calculer $h(\frac{1}{e})$ et donner le signe de $h'(x)$, puis dresser le tableau de variations de h . (1,25 pt)
 (c) Déterminer, à l'aide du tableau de variations :
 i. l'ensemble des solutions de l'inéquation : $h(x) \leq 0$; (1 pt)
 ii. l'image de l'intervalle $]0, e[$ par la fonction h . (0,75 pt)

Calcul intégral

Exercice 4 (4 points). On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = \ln x$.

1. Calculer $g(1)$, $f(1)$ et $f(3)$. (0,75 pt)
2. Ci-dessous, (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^2 \ln x \, dx = 2 \ln 2 - 1$. (1 pt)
 (b) Calculer $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3) \, dx$. (1,25 pt)
 (c) En déduire que l'aire de la partie hachurée est égale à $(2 \ln 2 - \frac{1}{3})$ u.a. (1 pt)

[Figure : dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la parabole (C_f) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 3, passe par $(0, 3)$ et a pour sommet le point $(2, -1)$; la courbe (C_g) de $\ln$ passe par le point $(1, 0)$ et se trouve au-dessus de (C_f) sur $]1, 3[$. La partie hachurée est la partie du plan délimitée par (C_g) (au-dessus), (C_f) (en dessous) et la droite d'équation $x = 2$; elle est comprise entre les droites $x = 1$ et $x = 2$.]