

Examen national : Corrigé

Session normale 2024 (épreuve officielle NS 26F)

Suites numériques

Solution 1.

1. $u_1 = \frac{2}{5}u_0 - 1 = \frac{2}{5} \times 5 - 1 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 = \frac{2}{5}u_1 - 1 = \frac{2}{5} \times 1 - 1 = \frac{2}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{3}{5}$. Donc $u_1 = 1$ et $u_2 = -\frac{3}{5}$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -\frac{5}{3}$.

Initialisation : $u_0 = 5 > -\frac{5}{3}$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n > -\frac{5}{3}$. En multipliant par $\frac{2}{5} > 0$: $\frac{2}{5}u_n > \frac{2}{5} \times (-\frac{5}{3}) = -\frac{2}{3}$, puis en retranchant 1 : $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n - 1 > -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > -\frac{5}{3}$.

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}u_n - 1 - u_n = -\frac{3}{5}u_n - 1 = -\frac{3}{5}(u_n + \frac{5}{3})$, car $-\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = -1$. D'après (a), $u_n + \frac{5}{3} > 0$; comme $-\frac{3}{5} < 0$, on obtient $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n . Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par $-\frac{5}{3}$ (question 2.a) : d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente.

3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - 1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{5}(u_n + \frac{5}{3}) = \frac{2}{5}v_n$, car $\frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$. Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.

(b) $v_0 = u_0 + \frac{5}{3} = 5 + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$.

(c) Suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{20}{3}$: pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = \frac{20}{3}(\frac{2}{5})^n$.

(d) Comme $v_n = u_n + \frac{5}{3}$, on a $u_n = v_n - \frac{5}{3}$, d'où pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{20}{3}(\frac{2}{5})^n - \frac{5}{3}$.

(e) Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{2}{5})^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{20}{3}(\frac{2}{5})^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 - \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$.

Calcul des probabilités

Solution 2.

On tire simultanément 3 boules parmi 9 : l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 boules parmi 9, toutes équiprobables (boules indiscernables au toucher) : $\text{card}(\Omega) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$.

1. Les boules portant le numéro 1 sont : V_1, R_1, B_1 (trois boules) ; celles portant le numéro 2 : V_2, R_2, B_2, B_2 (quatre boules) ; celles portant le numéro 3 : V_3, R_3 (deux boules seulement, on ne peut donc pas en tirer trois).

$\text{card}(A) = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} = 1 + 4 = 5$, d'où $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{84}$.

2. Les trois boules sont de couleurs deux à deux différentes : on tire une boule verte parmi 3, une rouge parmi 3 et une blanche parmi 3 : $\text{card}(B) = \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 \times 3 = 27$.
Donc $p(B) = \frac{27}{84} = \frac{9}{28}$.
3. $A \cap B$: les trois boules portent le même numéro **et** sont de trois couleurs différentes (une verte, une rouge, une blanche).
Numéro 1 : $V_1 R_1 B_1$, soit 1 tirage. Numéro 2 : V_2, R_2 et l'une des deux boules B_2 , soit $1 \times 1 \times 2 = 2$ tirages. Numéro 3 : impossible (pas de boule blanche numérotée 3).
 $\text{card}(A \cap B) = 1 + 2 = 3$, d'où $p(A \cap B) = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}$.
4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{5}{84} + \frac{27}{84} - \frac{3}{84} = \frac{29}{84}$.

Étude d'une fonction numérique

Solution 3.

1. (a) Pour $x \in D$ et $x \neq 1$, $\ln x \neq 0$; en divisant le numérateur et le dénominateur de $h(x)$ par $\ln x$: $h(x) = \frac{\frac{\ln x + 1}{\ln x}}{\frac{\ln x - 1}{\ln x}} = \frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}$.
En 0^+ : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \frac{1+0}{1-0} = 1$.
En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1+0}{1-0} = 1$.
- (b) Quand $x \rightarrow e$, $\ln x \rightarrow \ln e = 1$, donc le numérateur $\ln x + 1 \rightarrow 2 > 0$ et le dénominateur $\ln x - 1 \rightarrow 0$.
Si $x < e$ alors $\ln x < 1$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante), donc $\ln x - 1 < 0$: le dénominateur tend vers 0^- et $\lim_{x \rightarrow e^-} h(x) = -\infty$.
Si $x > e$ alors $\ln x > 1$, donc $\ln x - 1 > 0$: le dénominateur tend vers 0^+ et $\lim_{x \rightarrow e^+} h(x) = +\infty$.
2. (a) $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln x + 1$, $v(x) = \ln x - 1$, $u'(x) = v'(x) = \frac{1}{x}$, et v ne s'annule pas sur D . Pour tout x de D : $h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1 - \ln x - 1)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x - 1)^2}$.
(b) $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1}{\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1} = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} = \frac{0}{-2} = 0$.
Pour tout x de D : $x > 0$ et $(\ln x - 1)^2 > 0$, donc $h'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2} < 0$: h est strictement décroissante sur $]0, e[$ et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$.
Tableau de variations de h : sur $]0, e[$, h décroît de 1 (limite en 0^+) vers $-\infty$ (limite en e^-), en passant par $h\left(\frac{1}{e}\right) = 0$; sur $]e, +\infty[$, h décroît de $+\infty$ (limite en e^+) vers 1 (limite en $+\infty$). Le signe de h' est $-$ sur chacun des deux intervalles.
- (c) i. Sur $]e, +\infty[$, h est strictement décroissante et tend vers 1 en $+\infty$, donc $h(x) > 1 > 0$: aucune solution. Sur $]0, e[$, h est strictement décroissante et $h\left(\frac{1}{e}\right) = 0$: $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq h\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$. L'ensemble des solutions de $h(x) \leq 0$ est $S = \left[\frac{1}{e}, e\right[$.
ii. h est continue et strictement décroissante sur $]0, e[$, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} h(x) = -\infty$, donc $h([0, e]) =]-\infty, 1]$.

Calcul intégral

Solution 4.

1. $g(1) = \ln 1 = 0$; $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$; $f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$. (Les deux courbes passent par le point $(1, 0)$ et (C_f) recoupe l'axe des abscisses en $x = 3$.)
2. (a) On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$; u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[1, 2]$. Par intégration par parties : $\int_1^2 \ln x \, dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \times \frac{1}{x} \, dx = (2 \ln 2 - 1 \times \ln 1) - \int_1^2 1 \, dx = 2 \ln 2 - [x]_1^2 = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$.
(b) Une primitive de $x^2 - 4x + 3$ est $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$, donc $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 8 + 6 \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) = \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$.
(c) Sur $[1, 2]$, la partie hachurée est délimitée par (C_g) au-dessus et (C_f) en dessous ($g(x) \geq f(x)$ sur $[1, 2]$ d'après la figure) et par la droite $x = 2$. Son aire, en unités d'aire, est $\mathcal{A} = \int_1^2 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_1^2 \ln x \, dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) \, dx = (2 \ln 2 - 1) - \left(-\frac{2}{3} \right) = 2 \ln 2 - 1 + \frac{2}{3} = 2 \ln 2 - \frac{1}{3}$.
Donc l'aire de la partie hachurée est $(2 \ln 2 - \frac{1}{3})$ u.a. (soit environ 1,05 u.a.).