

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2023 (épreuve officielle RS 26F)

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte six exercices indépendants. Barème : 2 + 3 + 1 + 3 + 9 + 2 points. Vous devez justifier les résultats.

Suites numériques

Exercice 1 (2 points). Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $w_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Vérifier que $w_n = 1 - \frac{2}{2^n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,25 pt)
2. Montrer que $w_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,5 pt)
3. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante (en utilisant la question 1.). (0,75 pt)
4. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse. (0,5 pt)

Suites numériques

Exercice 2 (3 points). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n - \frac{5}{7}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 . (0,25 pt)
2. On pose $v_n = u_n + \frac{5}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - (a) Calculer v_0 . (0,25 pt)
 - (b) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{7}$. (1 pt)
 - (c) En déduire v_n en fonction de n . (0,5 pt)
3. (a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n - \frac{5}{2}$. (0,5 pt)
 - (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,5 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (1 points). (Ω, p) est un espace probabilisé fini et X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

1. Compléter le tableau ci-dessus. (0,5 pt)
2. Calculer $E(X)$. (0,5 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 4 (3 points). Une urne contient quatre boules rouges et trois boules vertes (toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'expérience suivante : « On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne. » Soit l'événement A : « Les trois boules tirées sont de même couleur » et l'événement B : « Tirer au moins une boule verte ».

1. Vérifier que $p(A) = \frac{1}{7}$ et calculer $p(B)$. (1,5 pt)
2. On répète l'expérience citée ci-dessus 4 fois de suite dans les mêmes conditions. Montrer que la probabilité pour que l'événement A se réalise exactement 3 fois est $\frac{24}{7^4}$. (1,5 pt)

Étude de fonctions

Exercice 5 (9 points). Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = \frac{-2 + \ln x}{-1 + \ln x}$.

Soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifier que le domaine de définition de la fonction g est $D_g =]0, e[\cup]e, +\infty[$. (1 pt)
2. (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$. (1 pt)
 (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat. (1,5 pt)
 (c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow e^-} g(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow e^+} g(x)$. (1 pt)
 (d) Donner une interprétation géométrique des deux résultats précédents. (0,5 pt)
3. (a) Montrer que $g'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$ pour tout x de D_g . (1 pt)
 (b) Montrer que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]0, e[$ et $]e, +\infty[$. (1 pt)
 (c) Calculer $g(e^2)$ puis dresser le tableau de variations de g . (1 pt)
 (d) À l'aide du tableau de variations de g , donner l'ensemble des solutions de l'inéquation : $g(x) \geq 0$. (1 pt)

Calcul intégral

Exercice 6 (2 points). Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - 1$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (Δ) la droite d'équation $y = -x + 2$ et A le point d'abscisse a ($a > 0$), intersection de (C_f) et (Δ) (voir figure ci-dessous). [Figure : la courbe (C_f) est strictement décroissante, passe par l'origine O et tend vers la droite $y = -1$ en $+\infty$; la droite (Δ) : $y = -x + 2$ coupe l'axe des ordonnées en $(0, 2)$ et l'axe des abscisses au point $(2, 0)$; elle coupe (C_f) au point A d'abscisse a (environ 2,95), situé sous l'axe des abscisses ; la droite verticale $x = a$ est tracée en pointillés. La partie hachurée est la partie du plan située au-

dessous de l'axe des abscisses et au-dessus de la courbe (C_f) , entre $x = 0$ et $x = a$, limitée à droite par la droite (Δ) (entre le point $(2, 0)$ et le point A).]

1. Vérifier que $e^{-a} = 3 - a$. (0,5 pt)
2. Montrer que $\int_0^a (e^{-x} - 1) dx = -2$. (1 pt)
3. En déduire l'aire de la partie hachurée. (0,5 pt)