

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2023 (épreuve officielle RS 26F)

Suites numériques

Solution 1.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$: $1 - \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}} = \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = w_n$.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $2^n + 1 > 0$, donc $\frac{2}{2^{n+1}} > 0$ et $w_n = 1 - \frac{2}{2^{n+1}} < 1$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, en utilisant la question 1. : $w_{n+1} - w_n = \left(1 - \frac{2}{2^{n+1+1}}\right) - \left(1 - \frac{2}{2^{n+1}}\right) = \frac{2}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1+1}} = \frac{2(2^{n+1+1}) - 2(2^{n+1})}{(2^{n+1+1})(2^{n+1+1})} = \frac{2 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n}{(2^{n+1})(2^{n+1+1})} = \frac{2 \times 2^n(2-1)}{(2^{n+1})(2^{n+1+1})} = \frac{2^n}{(2^{n+1})(2^{n+1+1})}$.
Ce quotient est strictement positif, donc $w_{n+1} > w_n$: la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(Autre rédaction : 2^n est croissant, donc $2^n + 1$ est croissant, $\frac{2}{2^{n+1}}$ est décroissant et $w_n = 1 - \frac{2}{2^{n+1}}$ est croissant.)
4. La suite (w_n) est croissante (question 3.) et majorée par 1 (question 2.). D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente. (De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2^{n+1}} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$.)

Suites numériques

Solution 2.

1. $u_1 = \frac{5}{7}u_0 - \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{5}{7} = \frac{5}{14} - \frac{10}{14} = -\frac{5}{14}$.
2. (a) $v_0 = u_0 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$.
(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{5}{2} = \frac{5}{7}u_n - \frac{5}{7} + \frac{5}{2} = \frac{5}{7}u_n + \frac{-10+35}{14} = \frac{5}{7}u_n + \frac{25}{14}$.
Or $\frac{5}{7}v_n = \frac{5}{7}(u_n + \frac{5}{2}) = \frac{5}{7}u_n + \frac{25}{14}$. Donc $v_{n+1} = \frac{5}{7}v_n$ pour tout n : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{7}$ et de premier terme $v_0 = 3$.
(c) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n$.
3. (a) Comme $v_n = u_n + \frac{5}{2}$, on a $u_n = v_n - \frac{5}{2}$, donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n - \frac{5}{2}$.
(b) Comme $-1 < \frac{5}{7} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 \times 0 - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$.

Calcul des probabilités

Solution 3.

1. La somme des probabilités d'une loi de probabilité vaut 1 : $p(X = 1) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = 1 - \left(\frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12}\right) = 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
Tableau complété : $p(X = 0) = \frac{1}{3}$, $p(X = 1) = \frac{1}{4}$, $p(X = 3) = \frac{1}{6}$, $p(X = 4) = \frac{1}{4}$.

2. $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$.
Donc $E(X) = \frac{7}{4} = 1,75$.

Calcul des probabilités

Solution 4.

- L'urne contient $4 + 3 = 7$ boules ; on tire simultanément trois boules, donc un tirage est une combinaison de 3 boules parmi 7, et le nombre de tirages équiprobables est $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$.
 A est réalisé si les trois boules sont rouges ($\binom{4}{3} = 4$ tirages) ou toutes vertes ($\binom{3}{3} = 1$ tirage) : $p(A) = \frac{4+1}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.
L'événement contraire de B est $\overline{B}$: « aucune boule verte », c'est-à-dire « les trois boules sont rouges », de probabilité $p(\overline{B}) = \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}$. Donc $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$.
- On répète 4 fois, de façon indépendante et dans les mêmes conditions, une épreuve dont le « succès » est la réalisation de A , de probabilité $p = \frac{1}{7}$ (échec de probabilité $1 - p = \frac{6}{7}$).
Le nombre Y de réalisations de A suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{7}$, donc $p(Y = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{7}\right)^3 \left(\frac{6}{7}\right)^1 = 4 \times \frac{1}{7^3} \times \frac{6}{7} = \frac{4 \times 6}{7^4} = \frac{24}{7^4}$.
La probabilité que A se réalise exactement 3 fois est bien $\frac{24}{7^4}$ ($= \frac{24}{2401} \approx 0,01$).

Étude de fonctions

Solution 5.

- $g(x)$ existe si et seulement si $\ln x$ existe, c'est-à-dire $x > 0$, et si le dénominateur est non nul : $-1 + \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e$.
Donc $D_g =]0, +\infty[\setminus \{e\} =]0, e[\cup]e, +\infty[$.
- (a) Quand $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$, donc la fraction est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x \in]0, e[$, $\ln x \neq 0$ dès que $x \neq 1$, et en divisant numérateur et dénominateur par $\ln x$: $g(x) = \frac{\frac{-2}{\ln x} + 1}{\frac{-1}{\ln x} + 1}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ (car $\ln x \rightarrow -\infty$), donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{0+1}{0+1} = 1$.
(b) De même, quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$, donc avec la même écriture $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{0+1}{0+1} = 1$.
Interprétation : la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_g) au voisinage de $+\infty$ (et aussi la courbe « part » du point $(0, 1)$ au voisinage de 0).
(c) Quand $x \rightarrow e$, $\ln x \rightarrow 1$, donc le numérateur $-2 + \ln x \rightarrow -1 < 0$ et le dénominateur $-1 + \ln x \rightarrow 0$.
Si $x \rightarrow e^-$ (avec $x < e$) : $\ln x < 1$ (car $\ln$ est strictement croissante), donc $-1 + \ln x \rightarrow 0^-$; le quotient d'un nombre proche de -1 par un nombre négatif proche de 0 tend vers $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow e^-} g(x) = +\infty$.
Si $x \rightarrow e^+$ (avec $x > e$) : $\ln x > 1$, donc $-1 + \ln x \rightarrow 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow e^+} g(x) = -\infty$.
(d) La droite d'équation $x = e$ est une asymptote verticale à la courbe (C_g) .
- (a) Sur D_g , g est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Avec $u(x) = -2 + \ln x$ et $v(x) = -1 + \ln x$, $u'(x) = v'(x) = \frac{1}{x}$: $g'(x) =$

$$\frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}(-1 + \ln x) - (-2 + \ln x)\frac{1}{x}}{(-1 + \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(-1 + \ln x + 2 - \ln x)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\frac{1}{x} \times 1}{(\ln x - 1)^2}.$$

Donc $g'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$ pour tout x de D_g .

(b) Pour tout x de D_g : $x > 0$ et $(\ln x - 1)^2 > 0$ (carré d'un réel non nul car $x \neq e$), donc $g'(x) > 0$. Ainsi g est strictement croissante sur $]0, e[$ et strictement croissante sur $]e, +\infty[$.

(c) $g(e^2) = \frac{-2 + \ln(e^2)}{-1 + \ln(e^2)} = \frac{-2 + 2}{-1 + 2} = \frac{0}{1} = 0$.

Tableau de variations de g : sur $]0, e[$, g est strictement croissante, de 1 (limite en 0^+) vers $+\infty$ (limite en e^-) ; sur $]e, +\infty[$, g est strictement croissante, de $-\infty$ (limite en e^+) vers 1 (limite en $+\infty$), en passant par $g(e^2) = 0$.

(d) Sur $]0, e[$: g est strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$, donc $g(x) > 1 > 0$ pour tout x de $]0, e[$: tout cet intervalle est solution.

Sur $]e, +\infty[$: g est strictement croissante et $g(e^2) = 0$, donc $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^2$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \geq 0$ est $S =]0, e[\cup [e^2, +\infty[$.

Calcul intégral

Solution 6.

- Le point A d'abscisse a appartient à (C_f) et à (Δ) , donc son ordonnée vérifie $f(a) = -a + 2$, c'est-à-dire $e^{-a} - 1 = -a + 2$, soit $e^{-a} = 3 - a$.
- Une primitive de $x \rightarrow e^{-x} - 1$ sur $\mathbb{R}$ est $x \rightarrow -e^{-x} - x$ (car $(-e^{-x})' = e^{-x}$). Donc $\int_0^a (e^{-x} - 1) dx = [-e^{-x} - x]_0^a = (-e^{-a} - a) - (-e^0 - 0) = -e^{-a} - a + 1$.
D'après la question 1., $e^{-a} = 3 - a$, donc $\int_0^a (e^{-x} - 1) dx = -(3 - a) - a + 1 = -3 + a - a + 1 = -2$.
- La partie hachurée est limitée en haut par l'axe des abscisses (de $x = 0$ à $x = 2$) puis par la droite (Δ) (de $x = 2$ à $x = a$), et en bas par la courbe (C_f) (de $x = 0$ à $x = a$). Sur $[0, a]$, $f(x) = e^{-x} - 1 \leq 0$ (car $e^{-x} \leq 1$ pour $x \geq 0$), donc la courbe est au-dessous de l'axe des abscisses.

L'aire du domaine compris entre (C_f) , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = a$ est $\int_0^a (0 - f(x)) dx = -\int_0^a (e^{-x} - 1) dx = 2$ (question 2.).

Il faut en retirer le triangle rectangle de sommets $(2, 0)$, $(a, 0)$ et $A(a, 2 - a)$, situé entre l'axe des abscisses et (Δ) pour $x \in [2, a]$, dont les côtés de l'angle droit mesurent $a - 2$ et $|2 - a| = a - 2$; son aire est $\frac{1}{2}(a - 2)^2$.

Donc l'aire de la partie hachurée est $\mathcal{A} = 2 - \frac{1}{2}(a - 2)^2 = 2 - \frac{a^2 - 4a + 4}{2} = 2a - \frac{a^2}{2} = \frac{a(4 - a)}{2}$ unité d'aire.

(Numériquement, $a \approx 2,95$ d'après l'équation $e^{-a} = 3 - a$, donc $\mathcal{A} \approx 1,55$ u.a.)