

Examen national : Mathématiques

Session normale 2023 (épreuve officielle NS 26F)

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte six exercices indépendants. Barème : 2 + 3 + 1 + 3 + 2,5 + 8,5 points.
Vous devez justifier les résultats.

Suites numériques

Exercice 1 (2 points). Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \frac{2}{7}w_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $w_n < \frac{7}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (1 pt)
2. (a) Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. (0,5 pt)
(b) La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse. (0,5 pt)

Suites numériques

Exercice 2 (3 points). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3+7u_n}{7+3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. On pose $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
(a) Calculer v_0 . (0,25 pt)
(b) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$. (1 pt)
(c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. (0,25 pt)
3. (a) Vérifier que $u_n = \frac{1-v_n}{1+v_n}$. (0,5 pt)
(b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$. (0,25 pt)
(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (1 points). (Ω, p) est un espace probabilisé fini. On rappelle que si A et B sont deux événements de Ω alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Soit A et B deux événements *indépendants* tels que : $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cup B) = \frac{5}{8}$.

Calculer $p(B)$. (1 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 4 (3 points). Une urne contient cent jetons indiscernables au toucher de couleur soit blanche soit noire et portant soit le chiffre 1 soit le chiffre 2. La répartition de ces jetons est donnée par le tableau suivant :

Chiffre porté par le jeton / Couleur	Blanche	Noire	Total
1	50	16	66
2	14	20	34
Total	64	36	100

On tire au hasard un jeton de l'urne.

- Calculer les probabilités suivantes :
 - La probabilité p_1 pour que le jeton soit de couleur blanche. (0,5 pt)
 - La probabilité p_2 pour que le jeton porte le chiffre 2. (0,5 pt)
 - La probabilité p_3 pour que le jeton porte le chiffre 2 et soit de couleur blanche. (0,5 pt)
- La probabilité p_4 pour que le jeton tiré porte le chiffre 2 sachant qu'il est de couleur blanche. (0,5 pt)
- On considère la variable aléatoire X qui est égale au chiffre porté par le jeton.
 - Copier et compléter le tableau suivant : (0,5 pt)

x_i	1	2
$p(X = x_i)$		

- Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X . (0,5 pt)

Limites et continuité

Exercice 5 (2.5 points).

- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$. (1,5 pt)
- On rappelle que si f est une fonction dérivable en x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.
Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \times \ln x \right)$. (1 pt)

Étude de fonctions et calcul intégral

Exercice 6 (8.5 points). On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \frac{x}{e^x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat. (1 pt)
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat. (1,5 pt)

2. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{x-1}{e^x}$. (0,5 pt)
(b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
(c) Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0. (1 pt)
3. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 2. (1,5 pt)
4. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = 1$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
[Figure : la courbe (C_f) descend de $+\infty$ (à gauche), passe par le point $(0, 1)$ où elle coupe la droite horizontale $(\Delta) : y = 1$, atteint son minimum au point d'abscisse 1 puis remonte vers (Δ) sans la couper. La partie hachurée est la partie du plan comprise entre la droite (Δ) et la courbe (C_f) pour x variant de 0 à 1 ; la droite verticale d'équation $x = 1$ est tracée en pointillés.]
(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$. (1 pt)
(b) En déduire l'aire de la partie hachurée. (1 pt)