

Examen national : Corrigé

Session normale 2023 (épreuve officielle NS 26F)

Suites numériques

Solution 1.

1. **Initialisation** : $w_0 = 1 < \frac{7}{5}$ (car $\frac{7}{5} = 1,4$), la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n < \frac{7}{5}$. Alors $\frac{2}{7}w_n < \frac{2}{7} \times \frac{7}{5} = \frac{2}{5}$, donc $w_{n+1} = \frac{2}{7}w_n + 1 < \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}$.
Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n < \frac{7}{5}$.
2. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_{n+1} - w_n = \frac{2}{7}w_n + 1 - w_n = 1 - \frac{5}{7}w_n = \frac{5}{7}(\frac{7}{5} - w_n)$. D'après la question 1., $\frac{7}{5} - w_n > 0$, donc $w_{n+1} - w_n > 0$: la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(b) La suite (w_n) est croissante et majorée par $\frac{7}{5}$. D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente. (Sa limite l vérifie $l = \frac{2}{7}l + 1$, soit $l = \frac{7}{5}$.)

Suites numériques

Solution 2.

1. $u_1 = \frac{3+7 \times 0}{7+3 \times 0} = \frac{3}{7}$ et $u_2 = \frac{3+7 \times \frac{3}{7}}{7+3 \times \frac{3}{7}} = \frac{3+3}{7+\frac{9}{7}} = \frac{6}{\frac{58}{7}} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$.
Donc $u_1 = \frac{3}{7}$ et $u_2 = \frac{21}{29}$.
2. (a) $v_0 = \frac{1-u_0}{1+u_0} = \frac{1-0}{1+0} = 1$.
(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $1 - u_{n+1} = 1 - \frac{3+7u_n}{7+3u_n} = \frac{7+3u_n-3-7u_n}{7+3u_n} = \frac{4-4u_n}{7+3u_n} = \frac{4(1-u_n)}{7+3u_n}$
et $1 + u_{n+1} = \frac{7+3u_n+3+7u_n}{7+3u_n} = \frac{10+10u_n}{7+3u_n} = \frac{10(1+u_n)}{7+3u_n}$.
Donc $v_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{1+u_{n+1}} = \frac{4(1-u_n)}{7+3u_n} \times \frac{7+3u_n}{10(1+u_n)} = \frac{4}{10} \times \frac{1-u_n}{1+u_n} = \frac{2}{5}v_n$.
Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = 1$.
(c) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times (\frac{2}{5})^n = (\frac{2}{5})^n$.
3. (a) De $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$ on tire $v_n(1+u_n) = 1-u_n$, soit $v_n + v_n u_n = 1-u_n$, d'où $u_n(1+v_n) = 1-v_n$ et, comme $1+v_n > 0$ (car $v_n = (\frac{2}{5})^n > 0$) : $u_n = \frac{1-v_n}{1+v_n}$.
(b) En remplaçant v_n par $(\frac{2}{5})^n$: pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1-(\frac{2}{5})^n}{1+(\frac{2}{5})^n}$.
(c) Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{2}{5})^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1-0}{1+0} = 1$.

Calcul des probabilités

Solution 3.

Les événements A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{2}p(B)$.

D'après la formule rappelée : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + p(B) - \frac{1}{2}p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p(B)$.

Or $p(A \cup B) = \frac{5}{8}$, donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p(B) = \frac{5}{8}$, soit $\frac{1}{2}p(B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8} - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$, d'où $p(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
Donc $p(B) = \frac{1}{4}$.

Calcul des probabilités

Solution 4.

On tire un jeton parmi 100 jetons indiscernables : les 100 tirages sont équiprobables et la probabilité d'un événement est le nombre de jetons favorables divisé par 100.

- (a) Il y a 64 jetons blancs : $p_1 = \frac{64}{100} = \frac{16}{25} = 0,64$.
(b) Il y a 34 jetons portant le chiffre 2 : $p_2 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50} = 0,34$.
(c) Il y a 14 jetons blancs portant le chiffre 2 : $p_3 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50} = 0,14$.
- On cherche la probabilité conditionnelle de « chiffre 2 » sachant « blanche » : $p_4 = \frac{p_3}{p_1} = \frac{\frac{14}{100}}{\frac{64}{100}} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32} = 0,21875$. (Directement : parmi les 64 jetons blancs, 14 portent le chiffre 2.)
- (a) X prend les valeurs 1 et 2. Il y a 66 jetons portant le chiffre 1 et 34 portant le chiffre 2, donc $p(X = 1) = \frac{66}{100} = \frac{33}{50} = 0,66$ et $p(X = 2) = \frac{34}{100} = \frac{17}{50} = 0,34$.
(b) $E(X) = 1 \times \frac{66}{100} + 2 \times \frac{34}{100} = \frac{66+68}{100} = \frac{134}{100} = \frac{67}{50} = 1,34$.

Limites et continuité

Solution 5.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty$ et, par somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = +\infty$.
Pour la seconde limite, la somme est une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On écrit, pour $x > 0$: $\frac{1}{x} + \ln x = \frac{1}{x}(1 + x \ln x)$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ (limite usuelle), donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x \ln x) = 1$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = +\infty$.
- La fonction $\ln$ est dérivable en $x_0 = 1$, avec $\ln 1 = 0$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc $\ln'(1) = 1$. D'après le rappel : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$.
Ensuite $\frac{x}{x-1} \times \ln x = x \times \frac{\ln x}{x-1}$; comme $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, on obtient par produit $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \times \ln x\right) = 1 \times 1 = 1$.

Étude de fonctions et calcul intégral

Solution 6.

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (limite usuelle, croissances comparées), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - 0 = 1$.
Interprétation : la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
(b) Pour tout réel x , $\frac{x}{e^x} = xe^{-x}$. Quand $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

(car $-x \rightarrow +\infty$), donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - (-\infty) = +\infty$.

Puis, pour $x \neq 0$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x} = \frac{1}{x} - e^{-x}$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

Interprétation : la courbe (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables ($e^x \neq 0$). Avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$: $\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \times e^x - x e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$.
Donc $f'(x) = 0 - \frac{1-x}{e^x} = \frac{x-1}{e^x}$.

(b) Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$: $f'(x) < 0$ pour $x < 1$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$.

Tableau de variations de f : f est strictement décroissante sur $] -\infty, 1]$, de $+\infty$ jusqu'à $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$, puis strictement croissante sur $[1, +\infty[$, de $1 - \frac{1}{e}$ vers 1 (limite en $+\infty$). Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(1) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$.

(c) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or $f(0) = 1 - \frac{0}{e^0} = 1$ et $f'(0) = \frac{0-1}{e^0} = -1$. Donc la tangente a pour équation $y = -x + 1$.

3. $f'(x) = \frac{x-1}{e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^x$: $f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$.

Comme $e^x > 0$, $f''(x)$ a le signe de $2 - x$: $f''(x) > 0$ pour $x < 2$, $f''(2) = 0$ et $f''(x) < 0$ pour $x > 2$. La dérivée seconde s'annule en 2 en changeant de signe, donc la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 2 (de coordonnées $(2, 1 - \frac{2}{e^2})$) : elle est convexe sur $] -\infty, 2]$ et concave sur $[2, +\infty[$.

4. (a) On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$; ces fonctions sont dérivables à dérivées continues sur $[0, 1]$. Par intégration par parties : $\int_0^1 x e^{-x} dx = [x \times (-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x}) dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$.
Or $[-x e^{-x}]_0^1 = -1 \times e^{-1} - 0 = -\frac{1}{e}$ et $\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-e^0) = 1 - \frac{1}{e}$.
Donc $\int_0^1 x e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$.

(b) La partie hachurée est délimitée par (Δ) , (C_f) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Pour $x \in [0, 1]$: $1 - f(x) = \frac{x}{e^x} = x e^{-x} \geq 0$, donc (C_f) est au-dessous de (Δ) et l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_0^1 (1 - f(x)) dx = \int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$.

Donc l'aire de la partie hachurée est $\frac{e-2}{e}$ unité d'aire ($\approx 0,26$ u.a.).