

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2022 (épreuve officielle RS 26F)

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 4,5 + 11 + 4,5 points. Vous devez justifier les résultats.

Suites numériques

Exercice 1 (4.5 points). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2u_n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 0$. (0,5 pt)
(b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 1$. (0,5 pt)
3. (a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}$. (0,5 pt)
(b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. (0,25 pt)
(c) Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0,25 pt)
4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$.
(a) Calculer v_0 . (0,25 pt)
(b) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. (0,5 pt)
(c) Exprimer v_n en fonction de n . (0,5 pt)
5. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{v_n+1}$. (0,25 pt)
(b) Déduire de ce qui précède que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{(\frac{1}{3})^n+1}$. (0,25 pt)
(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25 pt)

Étude de fonctions et calcul intégral

Exercice 2 (11 points). Partie I. On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$.

1. Montrer que $g'(x) = 2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$. (1 pt)
2. En déduire que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. (1 pt)
3. (a) Calculer $g(1)$. (0,25 pt)
(b) Dresser le tableau de variations de g (le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé). (0,25 pt)
(c) En déduire que $g(x) \geq 3$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (0,5 pt)

Partie II. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat. (1 pt)
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5 pt)
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1))$. (0,5 pt)
 (c) Donner une interprétation géométrique du résultat. (0,25 pt)
3. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (1 pt)
 (b) Dédire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
 (c) Dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)
4. (a) Montrer que $f''(x) = \frac{2}{x^3}(-3 + 2 \ln x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (1 pt)
 (b) En déduire que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse $e\sqrt{e}$. (1 pt)
5. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 [Figure : la courbe (C_f) , strictement croissante, part de $-\infty$ le long de l'axe des ordonnées, coupe la droite (Δ) au point de coordonnées $(1, 2)$ puis reste au-dessus de (Δ) ; la droite (Δ) : $y = x + 1$ coupe l'axe des ordonnées en $(0, 1)$. La partie hachurée est la partie du plan comprise entre la courbe (C_f) et la droite (Δ) pour x variant de 1 à 2 ; les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 2$ sont tracées en pointillés.]
 (a) Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$. (1 pt)
 (b) En déduire l'aire de la partie hachurée. (0,75 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (4.5 points). (On donnera les résultats sous forme de fraction.)

Une urne contient six jetons rouges portant les numéros : 1, 2, 2, 2, 3, 3 et quatre jetons verts portant les numéros : 2, 2, 2, 3 (tous les jetons sont indiscernables au toucher). On tire simultanément au hasard trois jetons de l'urne. On considère les événements suivants :

A : « Les jetons tirés portent le même numéro » ;

B : « Les jetons tirés sont de même couleur ».

1. Montrer que le nombre de tirages possibles est égal à 120. (0,5 pt)
2. (a) Montrer que $p(A) = \frac{7}{40}$. (0,75 pt)
 (b) Calculer $p(B)$. (0,75 pt)
 (c) Calculer la probabilité de tirer trois jetons de même couleur sachant qu'ils portent le même numéro. (1 pt)
 (d) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse. (0,5 pt)
3. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de couleurs obtenues à chaque tirage. Calculer $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$. (1 pt)