

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2022 (épreuve officielle RS 26F)

Suites numériques

Solution 1.

$$1. u_1 = \frac{3u_0}{2u_0+1} = \frac{3 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \text{ et } u_2 = \frac{3u_1}{2u_1+1} = \frac{3 \times \frac{3}{4}}{2 \times \frac{3}{4} + 1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{10}.$$

$$\text{Donc } u_1 = \frac{3}{4} \text{ et } u_2 = \frac{9}{10}.$$

$$2. (a) \text{ Initialisation : } u_0 = \frac{1}{2} > 0.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $3u_n > 0$ et $2u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2u_n+1} > 0$ (quotient de deux nombres strictement positifs).

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$(b) \text{ Initialisation : } u_0 = \frac{1}{2} < 1.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 1$. On a $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - (2u_n+1)}{2u_n+1} = \frac{u_n-1}{2u_n+1}$. Or $u_n - 1 < 0$ (hypothèse) et $2u_n + 1 > 0$ (car $u_n > 0$), donc $u_{n+1} - 1 < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < 1$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 1$.

$$3. (a) \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{2u_n+1} - u_n = \frac{3u_n - u_n(2u_n+1)}{2u_n+1} = \frac{3u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n+1} = \frac{2u_n - 2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}.$$

(b) D'après la question 2., $0 < u_n < 1$, donc $2u_n > 0$, $1 - u_n > 0$ et $2u_n + 1 > 0$: $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 (question 2.b) : d'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente.

$$4. (a) v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

$$(b) \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_n \neq 0 \text{ et } \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+1}{3u_n}, \text{ donc } v_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3u_n} - 1 = \frac{2u_n+1-3u_n}{3u_n} = \frac{1-u_n}{3u_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right) = \frac{1}{3} v_n.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

$$(c) \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$5. (a) v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \text{ donne } \frac{1}{u_n} = v_n + 1, \text{ donc } u_n = \frac{1}{v_n+1} \text{ (on a } v_n + 1 = \frac{1}{u_n} \neq 0).$$

$$(b) \text{ En remplaçant } v_n \text{ par } \left(\frac{1}{3}\right)^n : u_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

$$(c) \text{ Comme } -1 < \frac{1}{3} < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{0+1} = 1.$$

Étude de fonctions et calcul intégral

Solution 2.

Partie I.

$$1. g \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et, pour tout } x > 0 : g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x} = 2\left(\frac{x^2-1}{x}\right).$$

2. Pour $x > 0$, $g'(x)$ a le signe de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, c'est-à-dire le signe de $x - 1$ (car $x + 1 > 0$).
- Sur $]0, 1[$, $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante sur $]0, 1[$.
- Sur $]1, +\infty[$, $g'(x) > 0$: g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
3. (a) $g(1) = 1 + 2 - 2 \ln 1 = 3$.
- (b) **Tableau de variations de g** : g est strictement décroissante sur $]0, 1[$, atteint son minimum $g(1) = 3$ en $x = 1$, puis est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
- (c) D'après le tableau de variations, g admet en 1 un minimum sur $]0, +\infty[$ qui vaut 3. Donc pour tout x de $]0, +\infty[$: $g(x) \geq 3$.

Partie II.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{x} = -\infty$; comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
- Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe (C_f) .
2. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite usuelle), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0$; et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (b) $f(x) - (x + 1) = \frac{2 \ln x}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0$.
- (c) La droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
3. (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, avec $u(x) = 2 \ln x$ et $v(x) = x$: $\left(\frac{2 \ln x}{x}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$.
- Donc $f'(x) = 1 + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.
- (b) Pour tout $x > 0$, $g(x) \geq 3 > 0$ (partie I) et $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- (c) **Tableau de variations de f** : f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (la flèche monte de $-\infty$ à $+\infty$).
4. (a) $f'(x) = 1 + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$. La fonction f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, avec $u(x) = 2 - 2 \ln x$ et $v(x) = x^2$: $f''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-\frac{2}{x} \times x^2 - (2 - 2 \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{-2x - 4x + 4x \ln x}{x^4} = \frac{x(-6 + 4 \ln x)}{x^4} = \frac{-6 + 4 \ln x}{x^3}$.
- Donc $f''(x) = \frac{2(-3 + 2 \ln x)}{x^3} = \frac{2}{x^3}(-3 + 2 \ln x)$.
- (b) Pour $x > 0$, $\frac{2}{x^3} > 0$ donc $f''(x)$ a le signe de $-3 + 2 \ln x$. Or $-3 + 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$, et comme $\ln$ est strictement croissante : $f''(x) < 0$ sur $]0, e\sqrt{e}[$ et $f''(x) > 0$ sur $]e\sqrt{e}, +\infty[$.
- f'' s'annule en $e\sqrt{e}$ en changeant de signe, donc la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse $e\sqrt{e}$ (concave avant, convexe après).
5. (a) La fonction $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ est de la forme u'/u avec $u = \ln x$; une primitive sur $]0, +\infty[$ est $x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$. Donc $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.
- (b) La partie hachurée est délimitée par (C_f) , (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Sur $[1, 2]$, $f(x) - (x + 1) = \frac{2 \ln x}{x} \geq 0$ (car $\ln x \geq 0$ pour $x \geq 1$), donc (C_f) est au-dessus de (Δ) et l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_1^2 (f(x) - (x + 1)) dx = \int_1^2 \frac{2 \ln x}{x} dx = 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = 2 \times \frac{1}{2}(\ln 2)^2 = (\ln 2)^2$.
- Donc l'aire de la partie hachurée est $(\ln 2)^2$ unité d'aire ($\approx 0,48$ u.a.).

Calcul des probabilités

Solution 3.

1. L'urne contient $6 + 4 = 10$ jetons. On tire simultanément trois jetons : un tirage est une combinaison de 3 jetons parmi 10, et $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$. Le nombre de tirages possibles est bien 120, tous équiprobables.
2. (a) Répartition des numéros : le numéro 1 est porté par 1 jeton, le numéro 2 par $3 + 3 = 6$ jetons, le numéro 3 par $2 + 1 = 3$ jetons. A est réalisé si les trois jetons portent le numéro 2 ($\binom{6}{3} = 20$ tirages) ou le numéro 3 ($\binom{3}{3} = 1$ tirage) ; trois jetons numéro 1 est impossible. Donc $p(A) = \frac{20+1}{120} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$.
 (b) B est réalisé si les trois jetons sont rouges ($\binom{6}{3} = 20$ tirages) ou verts ($\binom{4}{3} = 4$ tirages). Donc $p(B) = \frac{20+4}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.
 (c) On cherche $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$. L'événement $A \cap B$: « même numéro et même couleur » est réalisé par trois jetons rouges numéro 2 ($\binom{3}{3} = 1$ tirage) ou trois jetons verts numéro 2 ($\binom{3}{3} = 1$ tirage) ; il n'y a que 2 jetons rouges numéro 3 et un seul vert numéro 3, donc pas d'autre cas. Ainsi $p(A \cap B) = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$ et $p_A(B) = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{7}{40}} = \frac{1}{60} \times \frac{40}{7} = \frac{40}{420} = \frac{2}{21}$.
 (d) $p(A) \times p(B) = \frac{7}{40} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{200}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{60}$. Comme $\frac{7}{200} = \frac{21}{600}$ et $\frac{1}{60} = \frac{10}{600}$, on a $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$: les événements A et B ne sont pas indépendants. (On peut aussi remarquer que $p_A(B) = \frac{2}{21} \neq p(B) = \frac{1}{5}$.)
3. Les trois jetons tirés sont soit d'une seule couleur, soit de deux couleurs : X prend les valeurs 1 et 2.
 ($X = 1$) est l'événement B , donc $p(X = 1) = p(B) = \frac{1}{5}$.
 ($X = 2$) est l'événement contraire, donc $p(X = 2) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.