

Examen national : Mathématiques

Session normale 2022 (épreuve officielle NS 26F)

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 4,5 + 11 + 4,5 points. Vous devez justifier les résultats.

Suites numériques

Exercice 1 (4.5 points). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 2$. (1 pt)
3. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(2 - u_n)$. (0,5 pt)
(b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. (0,25 pt)
4. Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0,25 pt)
5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 2$.
(a) Calculer v_0 . (0,25 pt)
(b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. (0,5 pt)
(c) Donner v_n en fonction de n . (0,5 pt)
6. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2$. (0,5 pt)
(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25 pt)

Étude de fonctions et calcul intégral

Exercice 2 (11 points). Partie I. On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = x^2 - \ln x$.

1. Montrer que $h'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
2. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
3. Vérifier que $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\ln 2}{2}$ et dresser le tableau de variations de h (le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé). (1 pt)
4. En déduire que : $h(x) > 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (0,5 pt)

Partie II. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1+\ln x}{x} + x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. (0,5 pt)
(b) Donner une interprétation géométrique du résultat. (0,25 pt)

2. (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. (0,5 pt)
 (c) Dédire de ce qui précède une interprétation géométrique du résultat. (0,25 pt)
3. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$. (1 pt)
 (b) Dédire de la question 4. de la partie I que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. (1 pt)
4. Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.
 (a) Calculer $f(\frac{1}{e})$. (0,5 pt)
 (b) Étudier le signe de $f(x) - x$. (1 pt)
 (c) En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur chacun des intervalles $]0, \frac{1}{e}]$ et $[\frac{1}{e}, +\infty[$. (0,5 pt)
5. Dans la figure ci-dessous (C) est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 [Figure : la courbe (C) , strictement croissante, part de $-\infty$ le long de l'axe des ordonnées, coupe la droite (Δ) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ et passe par le point de coordonnées $(1, 2)$; la droite $(\Delta) : y = x$ passe par l'origine. La partie hachurée est la partie du plan comprise entre la courbe (C) et la droite (Δ) pour x variant de $\frac{1}{e}$ à 1 ; la droite verticale d'équation $x = 1$ est tracée en pointillés.]
 (a) Calculer $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} dx$ et calculer $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{x} dx$. (1,5 pt)
 (b) En déduire l'aire de la partie hachurée. (1 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (4.5 points). (On donnera les résultats sous forme de fraction.)

Un sac contient cinq boules blanches numérotées 1 - 2 - 3 - 3 - 3 et quatre boules noires numérotées 1 - 2 - 3 - 3 (toutes les boules sont indiscernables au toucher). On tire simultanément au hasard deux boules du sac. On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont de même couleur » ;

B : « L'une exactement des deux boules tirées porte le numéro 3 ».

1. (a) Montrer que $p(A) = \frac{4}{9}$. (1 pt)
 (b) Calculer $p(B)$. (0,5 pt)
 (c) Calculer $p(A \cap B)$. (1 pt)
 (d) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse. (0,5 pt)
2. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées et qui portent le numéro 3.
 (a) Copier et remplir le tableau ci-contre en justifiant les réponses. (1 pt)

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{15}{36}$		

- (b) Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X . (0,5 pt)