

Examen national : Corrigé

Session normale 2022 (épreuve officielle NS 26F)

Suites numériques

Solution 1.

1. $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5}$ et $u_2 = \frac{1}{5}u_1 + \frac{8}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{11}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{25} + \frac{40}{25} = \frac{51}{25}$.
Donc $u_1 = \frac{11}{5} = 2,2$ et $u_2 = \frac{51}{25} = 2,04$.
2. **Initialisation** : $u_0 = 3 > 2$, la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n > 2$. Alors $\frac{1}{5}u_n > \frac{2}{5}$, donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5} > \frac{2}{5} + \frac{8}{5} = \frac{10}{5} = 2$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 2$.
3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5} - u_n = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}u_n = \frac{4}{5}(2 - u_n)$.
(b) D'après la question 2., $u_n > 2$, donc $2 - u_n < 0$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(2 - u_n) < 0$. Donc $u_{n+1} < u_n$ pour tout n : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
4. La suite (u_n) est décroissante (question 3.b) et minorée par 2 (question 2). D'après le théorème de convergence des suites monotones, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
5. (a) $v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$.
(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5} - 2 = \frac{1}{5}u_n - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(u_n - 2) = \frac{1}{5}v_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = 1$.
(c) Pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$, soit $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
6. (a) Comme $v_n = u_n - 2$, on a $u_n = v_n + 2$, d'où, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2$.
(b) Puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 + 2 = 2$.

Étude de fonctions et calcul intégral

Solution 2.

Partie I.

1. h est dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions dérivables) et, pour tout $x > 0$: $h'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.
2. Sur $]0, +\infty[$, $x > 0$ donc $h'(x)$ a le signe de $2x^2 - 1$. Or $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (car $x > 0$), et $2x^2 - 1 = 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Donc $h'(x) < 0$ sur $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, $h'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ et $h'(x) > 0$ sur $]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.
3. $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \ln(2^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1 + \ln 2}{2}$.
Tableau de variations de h : d'après la question 2., h est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$; elle admet en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ un minimum égal à $\frac{1 + \ln 2}{2}$.

4. D'après le tableau de variations, pour tout x de $]0, +\infty[: h(x) \geq h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\ln 2}{2}$. Or $\ln 2 > 0$, donc $\frac{1+\ln 2}{2} > 0$. Ainsi $h(x) > 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

Partie II.

- (a) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty$; comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

(b) La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe (C) .
- (a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite usuelle) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(b) $f(x) - x = \frac{1+\ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0 + 0 = 0$.

(c) La droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
- (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme d'un quotient de fonctions dérivables (dénominateur non nul) et d'une fonction dérivable. Pour tout $x > 0$, avec $u(x) = 1 + \ln x$ et $v(x) = x : \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1+\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$.
Donc $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$.

(b) Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ et $h(x) > 0$ (partie I, question 4.), donc $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0$. Par conséquent f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- (a) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$, donc $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} + \frac{1}{e} = (1-1) \times e + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$.

(b) Pour tout $x > 0 : f(x) - x = \frac{1+\ln x}{x}$. Comme $x > 0$, ce quotient a le signe de $1 + \ln x$. Or $1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante).
Donc $f(x) - x < 0$ sur $]0, \frac{1}{e}[$, $f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} = 0$ et $f(x) - x > 0$ sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.

(c) Sur $]0, \frac{1}{e}[$, $f(x) - x \leq 0$: la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) . Sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$, $f(x) - x \geq 0$: la courbe (C) est au-dessus de (Δ) . Les deux se coupent au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ (de coordonnées $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$).
- (a) Une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \rightarrow \ln x : \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\frac{1}{e}}^1 = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 0 - (-1) = 1$.
La fonction $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'v$ avec $u = \ln x$, donc une primitive est $x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$:
 $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 - \frac{1}{2}(\ln\left(\frac{1}{e}\right))^2 = 0 - \frac{1}{2} \times (-1)^2 = -\frac{1}{2}$.

(b) La partie hachurée est délimitée par (C) , (Δ) et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.
Sur $[\frac{1}{e}, 1]$, (C) est au-dessus de (Δ) (question 4.c), donc l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^1 (f(x) - x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1+\ln x}{x} dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{x} dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Donc l'aire de la partie hachurée est $\frac{1}{2}$ unité d'aire (soit 0,5 cm² si l'unité est le centimètre).

Calcul des probabilités

Solution 3.

Le sac contient $5 + 4 = 9$ boules et l'on tire simultanément deux boules : les tirages sont les combinaisons de 2 boules parmi 9, équiprobables. Le nombre de cas possibles est $\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$.

- (a) A est réalisé si les deux boules sont blanches ($\binom{5}{2} = 10$ tirages) ou si les deux boules sont noires ($\binom{4}{2} = 6$ tirages). Donc $p(A) = \frac{10+6}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

(b) Le sac contient $3 + 2 = 5$ boules portant le numéro 3 et $9 - 5 = 4$ boules ne le portant pas. B est réalisé quand on tire une boule numérotée 3 et une boule non numérotée 3 : $5 \times 4 = 20$ tirages. Donc $p(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

(c) $A \cap B$: « les deux boules sont de même couleur et une seule porte le numéro 3 ». Deux blanches dont une seule numérotée 3 : $3 \times 2 = 6$ tirages (une parmi les 3 blanches « 3 », une parmi les 2 blanches « 1 » ou « 2 »). Deux noires dont une seule numérotée 3 : $2 \times 2 = 4$ tirages. Donc $p(A \cap B) = \frac{6+4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

(d) $p(A) \times p(B) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$, alors que $p(A \cap B) = \frac{5}{18} = \frac{45}{162}$ et $\frac{20}{81} = \frac{40}{162}$. Donc $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$: les événements A et B ne sont pas indépendants.

2. (a) Le sac contient 3 boules blanches numérotées 3 et 6 autres boules. X prend les valeurs 0, 1 et 2.

$$p(X = 0) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{15}{36} \text{ (aucune boule blanche « 3 ») ;}$$

$$p(X = 1) = \frac{3 \times 6}{\binom{9}{2}} = \frac{18}{36} \text{ (une boule blanche « 3 » et une des 6 autres) ;}$$

$$p(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{3}{36} \text{ (deux boules blanches « 3 »).}$$

Vérification : $\frac{15}{36} + \frac{18}{36} + \frac{3}{36} = \frac{36}{36} = 1$. Le tableau complété est donc : $x_i : 0, 1, 2 ; p(X = x_i) : \frac{15}{36}, \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

$$(b) E(X) = 0 \times \frac{15}{36} + 1 \times \frac{18}{36} + 2 \times \frac{3}{36} = \frac{18+6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$