

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2025 (épreuve officielle RS 22F)

Durée : 3 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient. L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter. L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème, indépendants entre eux. Barème : 3 + 3 + 3,5 + 2,5 + 8 points. On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z ; $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Suites numériques

Exercice 1 (3 points). On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2+u_n}$, pour tout entier naturel n .

1. (a) Vérifier que $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2+u_n}$, pour tout entier naturel n . (0,25 pt)
 (b) Montrer par récurrence que $0 < u_n < 2$, pour tout entier naturel n . (0,5 pt)
2. (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$, pour tout entier naturel n . (0,25 pt)
 (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire que (u_n) est convergente. (0,5 pt)
 (c) Montrer que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$, pour tout entier naturel n . (0,5 pt)
 (d) Déduire que $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$, pour tout entier naturel n . (0,5 pt)
 (e) Déterminer la limite de la suite (u_n) . (0,5 pt)

Géométrie dans l'espace

Exercice 2 (3 points). Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 3, 3)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 1)$ et le vecteur $\vec{n}(1, -1, 1)$. Soit (P) le plan d'équation $x - y + z - 6 = 0$.

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$ et déduire que les points A , B et C sont non alignés. (0,5 pt)
 (b) Montrer que les plans (ABC) et (P) sont parallèles. (0,25 pt)
2. Soit (S) la sphère telle que : le plan (ABC) est tangent à (S) en A et le plan (P) est tangent à (S) en un point H .
 (a) Calculer la distance du point A au plan (P) et déduire que le rayon de la sphère (S) est $\sqrt{3}$. (0,5 pt)
 (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (P) . (0,25 pt)
 (c) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2, 1, 5)$. (0,5 pt)

- (d) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) . (0,5 pt)
3. Déterminer les deux points d'intersection de la droite (BH) et la sphère (S) . (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 3 (3.5 points). Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $b = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $c = 1 + a$ et $d = \bar{c}$.

- Vérifier que $|a| = 1$ et que $\arg(a) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$. (0,5 pt)
- Vérifier que $\frac{c-d}{c-a} = i$ et déduire que le triangle ACD est isocèle rectangle en C . (0,75 pt)
- (a) Montrer que $d - a = 1 - i$ et que $b - d = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - i)$. (0,5 pt)
(b) Déduire que les points A, D et B sont alignés. (0,25 pt)
- Soit R la transformation du plan qui transforme chaque point M d'affixe z en M' d'affixe z' tel que $z' = az$.
(a) Vérifier que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle. (0,5 pt)
(b) Vérifier que $ad = c$ et déduire que $R(D) = C$. (0,5 pt)
(c) Montrer que $\arg(c) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$. (0,5 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 4 (2.5 points). Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires. (Les boules sont indiscernables au toucher.) Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise deux boules du sac. Les règles du jeu sont comme suit :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on note : $+5$.
- Si les deux boules tirées sont noires, on note : -5 .
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, on note : 0 .

On considère les événements :

- G : « noter $+5$ » ;
- Z : « noter 0 » ;
- N_1 : « La première boule tirée est noire » ;
- B_2 : « La deuxième boule tirée est blanche ».

- (a) Calculer $p(G)$, la probabilité de l'évènement G . (0,5 pt)
(b) Montrer que la probabilité de l'évènement Z est $p(Z) = \frac{4}{7}$. (0,5 pt)
- (a) Calculer la probabilité $p(N_1 \cap B_2)$. (0,5 pt)
(b) Montrer que $p(B_2) = \frac{4}{7}$. (0,5 pt)
(c) Déduire la probabilité de « noter 0 » sachant que la deuxième boule tirée est blanche. (0,5 pt)

Problème d'analyse

Exercice 5 (8 points). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 2}$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(\ln 2)$. (0,5 pt)
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 pt)
 (b) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$ puis interpréter géométriquement ce résultat. (0,5 pt)
3. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2}$. (0,25 pt)
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 2}$ puis déduire que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$. (0,5 pt)
 (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) - x < 1$. (0,5 pt)
4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2}$. (0,5 pt)
 (b) Déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
5. (a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
 (b) Soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ et montrer que $e^\alpha = \frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}$. (0,5 pt)
6. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^3}$. (0,5 pt)
 (b) Étudier le signe de $e^x - 2$ sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
 (c) Déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion que l'on déterminera. (0,5 pt)
 (d) Montrer que $y = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}$ est l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $\ln 2$. (0,5 pt)
7. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (0,75 pt)
8. (a) Montrer que $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. (0,5 pt)
 (b) Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite d'équation $y = x - 1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$. (0,5 pt)