

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2025 (épreuve officielle RS 22F)

Suites numériques

Solution 1.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3 - \frac{4}{2+u_n} = \frac{3(2+u_n)-4}{2+u_n} = \frac{3u_n+2}{2+u_n} = u_{n+1}$.

(b) **Initialisation** : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $0 < \frac{3}{2} < 2$. **Hérédité** : supposons $0 < u_n < 2$. Alors $2 < 2 + u_n < 4$, donc $1 < \frac{4}{2+u_n} < 2$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$), puis $3 - 2 < 3 - \frac{4}{2+u_n} < 3 - 1$, c'est-à-dire $1 < u_{n+1} < 2$; en particulier $0 < u_{n+1} < 2$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.
- (a) $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{2+u_n} - u_n = \frac{3u_n+2-2u_n-u_n^2}{2+u_n} = \frac{2+u_n-u_n^2}{2+u_n}$. Or $(1+u_n)(2-u_n) = 2-u_n+2u_n-u_n^2 = 2+u_n-u_n^2$. Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$.

(b) Comme $0 < u_n < 2$: $1+u_n > 0$, $2-u_n > 0$ et $2+u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est croissante. Croissante et majorée par 2, elle est convergente (théorème de convergence des suites monotones).

(c) $2 - u_{n+1} = 2 - 3 + \frac{4}{2+u_n} = \frac{4-(2+u_n)}{2+u_n} = \frac{2-u_n}{2+u_n}$. Comme $u_n < 2$, $2 - u_n > 0$ et $2 + u_n > 0$, donc $2 - u_{n+1} > 0$. De plus, la suite étant croissante, $u_n \geq u_0 = \frac{3}{2}$, donc $2 + u_n \geq \frac{7}{2}$ et $\frac{1}{2+u_n} \leq \frac{2}{7}$. Ainsi $2 - u_{n+1} = (2 - u_n) \times \frac{1}{2+u_n} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$ (car $2 - u_n > 0$). D'où $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Par récurrence. **Initialisation** : $2 - u_0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^0$, donc $0 < 2 - u_0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^0$. **Hérédité** : si $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$, alors d'après (c) : $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n) \leq \frac{2}{7} \times \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$. **Conclusion** : $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Comme $0 < \frac{2}{7} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - u_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Géométrie dans l'espace

Solution 2.

- (a) $\overrightarrow{AB}(1, -1, -2)$ et $\overrightarrow{AC}(2, 0, -2)$. Le produit vectoriel a pour coordonnées $((-1)(-2) - (-2)(0); (-2)(2) - (1)(-2); (1)(0) - (-1)(2)) = (2, -2, 2) = 2\vec{n}$. Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A , B et C sont non alignés.

(b) $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) (colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$) et $\vec{n}(1, -1, 1)$ est aussi un vecteur normal de (P) : $x - y + z - 6 = 0$. Deux plans ayant un même vecteur normal sont parallèles : $(ABC) \parallel (P)$.
- (a) $d(A, (P)) = \frac{|0-3+3-6|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Les plans (ABC) et (P) sont parallèles et tangents à (S) respectivement en A et H : le centre Ω de (S) appartient à la droite passant par A et orthogonale à (ABC) , qui est aussi orthogonale à (P) et coupe (P) en H . Ainsi $[AH]$

est un diamètre de (S) et $AH = d(A, (P)) = 2\sqrt{3}$ (car H est le projeté orthogonal de A sur (P)). Le rayon est donc $R = \frac{AH}{2} = \sqrt{3}$.

(b) (Δ) passe par $A(0, 3, 3)$ et est dirigée par $\vec{n}(1, -1, 1)$: $(\Delta) : \begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

(c) H est le projeté orthogonal de A sur (P) , c'est-à-dire le point d'intersection de (Δ) et (P) . On remplace : $t - (3 - t) + (3 + t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. D'où $H(2, 1, 5)$.

(d) Le centre Ω est le milieu de $[AH]$: $\Omega(1, 2, 4)$, et $R = \sqrt{3}$. Une équation de (S) est $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 3$, soit $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 1 + 4 + 16 - 3 = 0$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$.

3. $\overrightarrow{BH}(1, -1, 4)$, donc $(BH) : x = 1 + t, y = 2 - t, z = 1 + 4t \quad (t \in \mathbb{R})$. On remplace dans l'équation de (S) sous la forme $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 3$: $t^2 + t^2 + (4t - 3)^2 = 3 \Leftrightarrow 18t^2 - 24t + 9 = 3 \Leftrightarrow 18t^2 - 24t + 6 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(3t - 1) = 0$. Pour $t = 1$: le point $H(2, 1, 5)$; pour $t = \frac{1}{3}$: le point $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3})$. Les deux points d'intersection de (BH) et (S) sont $H(2, 1, 5)$ et $K(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3})$.

Nombres complexes

Solution 3.

- $|a| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$. Puis $a = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, donc $\arg(a) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.
- $c = 1 + a = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $d = \bar{c} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Donc $c - d = 2 \times \frac{1}{2}i = i$ et $c - a = 1$, d'où $\frac{c-d}{c-a} = i$. Alors $\left|\frac{c-d}{c-a}\right| = 1$, donc $CD = CA$, et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{c-d}{c-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Le triangle ACD est isocèle et rectangle en C .
- (a) $d - a = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{2}{2} - i = 1 - i$. $b - d = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1-2+\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)i = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)i = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - i)$.
(b) D'après (a), $b - d = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(d - a)$ avec $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \in \mathbb{R}$: les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, donc les points A, D et B sont alignés.
- (a) $z' = az$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$: R est la rotation de centre le point d'affixe 0, c'est-à-dire O (unique point fixe : $az = z \Leftrightarrow z = 0$), et d'angle $\arg(a) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.
(b) $ad = a\bar{c} = a(1 + a) = a(1 + \bar{a}) = a + a\bar{a} = a + |a|^2 = a + 1 = c$. Donc $ad = c$. L'image de D par R a pour affixe $ad = c$, qui est l'affixe de C : $R(D) = C$.
(c) De $c = ad$ on tire $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(d) [2\pi]$. Or $d = \bar{c}$, donc $\arg(d) \equiv -\arg(c) [2\pi]$. Ainsi $2\arg(c) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$, soit $\arg(c) \equiv \frac{5\pi}{12} [\pi]$. Comme $\operatorname{Re}(c) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} > 0$ et $\operatorname{Im}(c) = \frac{1}{2} > 0$, un argument de c est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$; parmi $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$, seul $\frac{5\pi}{12} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\arg(c) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$.

Calcul des probabilités

Solution 4.

Le tirage est successif sans remise : les issues sont les couples ordonnés de deux boules distinctes parmi 7, équiprobables, au nombre de $7 \times 6 = 42$.

1. (a) G : deux blanches, $4 \times 3 = 12$ issues. $p(G) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.
 (b) Z : couleurs différentes, c'est-à-dire (blanche puis noire) ou (noire puis blanche) : $4 \times 3 + 3 \times 4 = 24$ issues. $p(Z) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$. (Vérification : « noter -5 » a pour probabilité $\frac{3 \times 2}{42} = \frac{1}{7}$ et $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = 1$.)
2. (a) $N_1 \cap B_2$: première noire puis deuxième blanche : $3 \times 4 = 12$ issues. $p(N_1 \cap B_2) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.
 (b) $B_2 = (N_1 \cap B_2) \cup (\overline{N_1} \cap B_2)$ (réunion disjointe). $p(\overline{N_1} \cap B_2) = \frac{4 \times 3}{42} = \frac{2}{7}$ (première blanche puis deuxième blanche). Donc $p(B_2) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.
 (c) On cherche $p_{B_2}(Z) = \frac{p(Z \cap B_2)}{p(B_2)}$. Si la deuxième boule est blanche, on note 0 exactement quand la première est noire : $Z \cap B_2 = N_1 \cap B_2$, donc $p(Z \cap B_2) = \frac{2}{7}$ et $p_{B_2}(Z) = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{2}$.

Problème d'analyse

Solution 5.

1. $f(0) = 0 - 1 + \frac{4}{1+2} = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$. $f(\ln 2) = \ln 2 - 1 + \frac{4}{2+2} = \ln 2$.
2. (a) En $+\infty$: $e^x \rightarrow +\infty$ donc $\frac{4}{e^x+2} \rightarrow 0$, et $x-1 \rightarrow +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$ donc $\frac{4}{e^x+2} \rightarrow 2$, et $x-1 \rightarrow -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 (b) $f(x) - (x-1) = \frac{4}{e^x+2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Interprétation : la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
3. (a) $x+1 - \frac{2e^x}{e^x+2} = x+1 - \frac{2(e^x+2)-4}{e^x+2} = x+1 - 2 + \frac{4}{e^x+2} = x-1 + \frac{4}{e^x+2} = f(x)$.
 (b) Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x+2} = \frac{0}{2} = 0$. Alors $f(x) - (x+1) = -2\frac{e^x}{e^x+2} \rightarrow 0$: la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
 (c) $f(x) - x = -1 + \frac{4}{e^x+2}$. Pour tout x , $e^x > 0$ donc $e^x + 2 > 2$ et $0 < \frac{4}{e^x+2} < 2$, d'où $-1 < -1 + \frac{4}{e^x+2} < 1$, c'est-à-dire $-1 < f(x) - x < 1$.
4. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(\frac{4}{e^x+2}\right)' = -\frac{4e^x}{(e^x+2)^2}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{(e^x+2)^2 - 4e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{e^{2x} + 4e^x + 4 - 4e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x+2)^2}$.
 (b) Pour tout x , $e^{2x} + 4 > 0$ et $(e^x + 2)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. (a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Tout réel m admet donc un unique antécédent par f : l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
 (b) $f(-1) = -2 + \frac{4}{e^{-1}+2}$; comme $e^{-1} + 2 > 2$, $\frac{4}{e^{-1}+2} < 2$ et $f(-1) < 0$. $f(0) = \frac{1}{3} > 0$. Comme f est strictement croissante et $f(-1) < 0 = f(0) < f(1)$, on a $-1 < \alpha < 0$. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{e^\alpha+2} = 1 - \alpha \Leftrightarrow e^\alpha + 2 = \frac{4}{1-\alpha}$ (car $1 - \alpha \neq 0$) $\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{4-2(1-\alpha)}{1-\alpha} = \frac{2+2\alpha}{1-\alpha}$. Donc $e^\alpha = \frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}$.
6. (a) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $N(x) = e^{2x} + 4$ et $D(x) = (e^x + 2)^2$: $N'(x) = 2e^{2x}$ et $D'(x) = 2e^x(e^x + 2)$. Alors $f''(x) = \frac{2e^{2x}(e^x+2)^2 - (e^{2x}+4) \times 2e^x(e^x+2)}{(e^x+2)^4} = \frac{2e^x[e^x(e^x+2) - (e^{2x}+4)]}{(e^x+2)^3} = \frac{2e^x(2e^x-4)}{(e^x+2)^3} = \frac{4e^x(e^x-2)}{(e^x+2)^3}$.
 (b) $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$. Donc $e^x - 2 < 0$ sur $] -\infty, \ln 2[$, $e^x - 2 = 0$ pour $x = \ln 2$ et $e^x - 2 > 0$ sur $] \ln 2, +\infty[$.
 (c) $f''(x)$ a le signe de $e^x - 2$ (car $4e^x > 0$ et $(e^x + 2)^3 > 0$) : f'' s'annule en $\ln 2$ en changeant de signe (négative avant, positive après). La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse $\ln 2$, de coordonnées $(\ln 2, f(\ln 2)) = (\ln 2, \ln 2)$.

- (d) $f'(\ln 2) = \frac{e^{2\ln 2} + 4}{(e^{\ln 2} + 2)^2} = \frac{4+4}{16} = \frac{1}{2}$ et $f(\ln 2) = \ln 2$. La tangente au point d'abscisse $\ln 2$ a pour équation $y = \frac{1}{2}(x - \ln 2) + \ln 2 = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}$.
7. Construction : f est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$; $(\mathcal{C}_f)$ admet l'asymptote oblique $y = x + 1$ en $-\infty$ (la courbe est au-dessous : $f(x) - (x + 1) = -\frac{2e^x}{e^x + 2} < 0$) et l'asymptote oblique $y = x - 1$ en $+\infty$ (la courbe est au-dessus : $f(x) - (x - 1) = \frac{4}{e^x + 2} > 0$). Elle passe par $(0; \frac{1}{3})$, par le point d'inflexion $(\ln 2; \ln 2) \approx (0,69; 0,69)$ où la tangente a pour pente $\frac{1}{2}$, coupe l'axe des abscisses en $\alpha \approx -0,55$, et l'on peut placer $f(-2) \approx -1,13$, $f(2) \approx 1,43$. On trace les deux asymptotes, la tangente au point d'inflexion, puis la courbe.
8. (a) Pour tout x : $\frac{1}{e^x + 2} = \frac{e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$ (en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-x}). La fonction $x \mapsto 1 + 2e^{-x}$ est strictement positive et a pour dérivée $-2e^{-x}$, donc $x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1 + 2e^{-x})$ est une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$. Ainsi $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx = \left[-\frac{1}{2} \ln(1 + 2e^{-x})\right]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2} \ln(1 + 2 \times \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \ln(1 + 2) = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
- (b) Sur $[0, \ln 2]$, $f(x) - (x - 1) = \frac{4}{e^x + 2} > 0$: la courbe est au-dessus de la droite $y = x - 1$. L'aire cherchée est donc, en unités d'aire, $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} (f(x) - (x - 1)) dx = \int_0^{\ln 2} \frac{4}{e^x + 2} dx = 4 \times \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$.