

Examen national : Mathématiques

Session normale 2025 (épreuve officielle NS 22F)

Durée : 3 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le candidat peut traiter les exercices et le problème suivant l'ordre qui lui convient. L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter. L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux. Barème : 3 + 3,5 + 2,5 + 11 points. On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module ; $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien ; e est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$.

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 (3 points). Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 0, 2)$, $B(2, 0, 0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R = 2$.

1. (a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S) . (0,25 pt)
 (b) Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S) . (0,5 pt)
2. Soit I le milieu du segment $[AB]$.
 (a) Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S) . (0,25 pt)
 (b) Vérifier que $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$ puis montrer que $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$. (0,5 pt)
3. On considère un point $M(0, m, 0)$ de l'espace, où $m \in \mathbb{R}$.
 (a) Vérifier que $\vec{AB} \wedge \vec{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$. (0,5 pt)
 (b) Dédire que $mx + 2y + mz - 2m = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABM) . (0,25 pt)
 (c) Montrer que $d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$. (0,25 pt)
4. Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r . Montrer que $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}}$ et déduire que $\sqrt{2} < r \leq 2$, pour tout $m \in \mathbb{R}$. (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 2 (3.5 points). Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = \bar{a}$, $c = \frac{3(3+i)}{2}$, $d = \frac{3(1+i)}{2}$ et $\omega = \frac{5}{2}$.

1. (a) Vérifier que $a + b = 2$ et déduire que l'affixe du point P , milieu du segment $[AB]$, est $p = 1$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que a et b sont les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$. (0,5 pt)
2. (a) Vérifier que $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$. (0,5 pt)
 (b) Dédire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . (0,25 pt)

3. (a) Vérifier que $\frac{d-c}{a-b} = \frac{3}{4}i$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que $d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis en déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires. (0,5 pt)
4. Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $h(P) = G$.
 (a) Vérifier que $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que l'affixe du point G est $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$. (0,25 pt)
5. Montrer que les points Ω , G et D sont alignés. (0,5 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (2.5 points). Une urne contient six boules indiscernables au toucher : quatre boules blanches numérotées 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées 0 ; 1. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées portent le numéro 1 » ;

B : « Les deux boules tirées sont de même couleur ».

1. (a) Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$. (0,5 pt)
 (c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier. (0,5 pt)
2. On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'évènement A .
 (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilité de X : (0,75 pt)

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$			

- (b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X . (0,25 pt)

Problème d'analyse

Exercice 4 (11 points). Partie I. Le graphique ci-contre représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto 2 \ln x - (\ln x)^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ dans un même repère orthonormé.

[Figure : dans un repère orthonormé (abscisses de 0 à 9), la parabole $(\mathcal{C}_g)$ part de l'origine et monte rapidement ; la courbe $(\mathcal{C}_h)$ vient de $-\infty$ au voisinage de 0, coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1, atteint son maximum 1 au point d'abscisse e , puis redescend et recoupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $e^2 \approx 7,4$. La courbe $(\mathcal{C}_g)$ est entièrement au-dessus de $(\mathcal{C}_h)$.]

1. (a) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0, +\infty[$: $g(x) - h(x) > 0$. (0,25 pt)
 (b) Dédire que pour tout x de $]0, +\infty[$: $\frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$. (0,5 pt)
2. (a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis déduire que $\int_1^{e^2} \ln(x) dx = 1 + e^2$. (0,5 pt)
 (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2$. (0,5 pt)
 (c) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$ et déduire les deux points d'intersection

de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ avec l'axe des abscisses. (0,5 pt)

(d) Déduire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_h)$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$. (0,5 pt)

Partie II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat. (0,5 pt)
 (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (on peut poser $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5 pt)
 (c) Déduire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$. (0,5 pt)
2. (a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$. (0,75 pt)
 (b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (On peut utiliser la question Partie I-1-b.) (0,5 pt)
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
 (b) Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et montrer que $\ln \alpha = -\alpha$. (0,75 pt)
 (c) Montrer que $f(x) \leq x$, pour tout $x \in]0, +\infty[$. (0,25 pt)
 (d) Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1. (0,5 pt)
4. Le graphique ci-contre représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 [Figure : repère orthonormé gradué de -3 à 5 en abscisses et de -3 à 5 en ordonnées ; la droite $y = x$ est tracée en pointillés. La courbe $(\mathcal{C}_f)$, définie pour $x > 0$, part de $-\infty$ le long de l'axe des ordonnées (asymptote verticale), coupe l'axe des abscisses en $\alpha \approx 0,57$, est tangente à la droite $y = x$ au point $(1, 1)$, reste au-dessous de cette droite et s'en rapproche en $+\infty$.] Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0, 1]$.
 (a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer l'expression de $\varphi^{-1}(x)$.) (0,5 pt)
 (b) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que $(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2+2\alpha}$. (0,5 pt)
 (c) Recopier la courbe de φ et construire la courbe de φ^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (0,75 pt)

Partie III. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $1 < u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,5 pt)
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c.) (0,5 pt)
 (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. (0,25 pt)
 (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) . (0,5 pt)