

Examen national : Corrigé

Session normale 2025 (épreuve officielle NS 22F)

Géométrie dans l'espace

Solution 1.

- (a) $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow OM = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(b) $A : 0 + 0 + 2^2 = 4$ et $B : 2^2 + 0 + 0 = 4$. Donc $A \in (S)$ et $B \in (S)$.
- (a) Le plan (OAB) passe par le centre O de la sphère, donc $d(O, (OAB)) = 0 < R$: l'intersection de (OAB) et de (S) est le grand cercle de centre O et de rayon 2 contenu dans le plan (OAB) .

(b) $I = (\frac{0+2}{2}, 0, \frac{2+0}{2}) = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{AB}(2, 0, -2)$, donc $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 0 + 1 \times (-2) = 0$. Ainsi $(OI) \perp (AB)$; comme $I \in (AB)$, I est le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) et $d(O, (AB)) = OI = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$.
- (a) $\overrightarrow{AB}(2, 0, -2)$ et $\overrightarrow{AM}(0, m, -2)$. Le produit vectoriel a pour coordonnées $(0 \times (-2) - (-2) \times m; (-2) \times 0 - 2 \times (-2); 2 \times m - 0 \times 0) = (2m, 4, 2m)$, donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$.

(b) Ce vecteur n'est jamais nul (sa deuxième coordonnée vaut 4), donc A, B, M ne sont pas alignés et $\vec{n}(2m, 4, 2m)$ est normal au plan (ABM) ; le vecteur $\frac{1}{2}\vec{n} = (m, 2, m)$ l'est aussi. Une équation est donc $mx + 2y + mz + d = 0$, et $A(0, 0, 2) \in (ABM)$ donne $2m + d = 0$, soit $d = -2m$. D'où $(ABM) : mx + 2y + mz - 2m = 0$.

(c) $d(O, (ABM)) = \frac{|m \times 0 + 2 \times 0 + m \times 0 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 4 + m^2}} = \frac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$.
- On a $d(O, (ABM))^2 = \frac{4m^2}{4 + 2m^2} = \frac{2m^2}{2 + m^2} < 2 < 4 = R^2$, donc le plan coupe bien la sphère suivant un cercle, de rayon r vérifiant $r^2 = R^2 - d^2 = 4 - \frac{2m^2}{2 + m^2} = \frac{8 + 4m^2 - 2m^2}{2 + m^2} = \frac{8 + 2m^2}{2 + m^2} = \frac{2(2 + m^2) + 4}{2 + m^2} = 2 + \frac{4}{2 + m^2}$. Donc $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2 + m^2}}$. Pour tout $m \in \mathbb{R} : 2 + m^2 \geq 2$, donc $0 < \frac{4}{2 + m^2} \leq 2$ et $2 < r^2 \leq 4$, d'où (la fonction racine carrée étant strictement croissante) $\sqrt{2} < r \leq 2$.

Nombres complexes

Solution 2.

- (a) $a + b = a + \bar{a} = 2 \operatorname{Re}(a) = 2$. Le milieu P de $[AB]$ a pour affixe $p = \frac{a+b}{2} = 1$.

(b) $a + b = 2$ et $ab = a\bar{a} = |a|^2 = 1 + 4 = 5$. Deux nombres complexes de somme $S = 2$ et de produit $P = 5$ sont les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$, c'est-à-dire de $z^2 - 2z + 5 = 0$. (Vérification directe : $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$, solutions $\frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$.)
- (a) $\omega - a = \frac{5}{2} - 1 - 2i = \frac{3}{2} - 2i$, donc $|\omega - a| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$. $\omega - b = \frac{3}{2} + 2i$, donc $|\omega - b| = \frac{5}{2}$. $c = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i$, donc $\omega - c = -2 - \frac{3}{2}i$ et $|\omega - c| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.

- (b) $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \frac{5}{2}$: Ω est équidistant des trois sommets, c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (de rayon $\frac{5}{2}$).
3. (a) $d - c = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{9}{2} - \frac{3}{2}i = -3$ et $a - b = 1 + 2i - 1 + 2i = 4i$. Donc $\frac{d-c}{a-b} = \frac{-3}{4i} = \frac{-3i}{4i^2} = \frac{3}{4}i$.
- (b) $d - b = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 1 + 2i = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$ et $c - a = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i - 1 - 2i = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$. Or $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $(c - a)i = \frac{7}{2}i - \frac{1}{2}i^2 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i = d - b$. Donc $d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$. Il en résulte $\frac{d-b}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{c-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$: les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires.
4. (a) L'écriture complexe de l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ est $z' - c = \frac{2}{3}(z - c)$, soit $z' = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}z + \frac{3+i}{2} = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.
- (b) $g = \frac{2}{3}p + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{4+9}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$.
5. $g - \omega = \frac{13}{6} - \frac{15}{6} + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i$ et $d - \omega = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i = -1 + \frac{3}{2}i = 3(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i) = 3(g - \omega)$. Donc $\overrightarrow{\Omega D} = 3\overrightarrow{\Omega G}$: les vecteurs sont colinéaires et les points Ω , G et D sont alignés.

Calcul des probabilités

Solution 3.

Le tirage est simultané : les issues sont les combinaisons de 2 boules parmi 6, équiprobables, au nombre de $\binom{6}{2} = 15$.

1. (a) Quatre boules portent le numéro 1 (trois blanches et une noire) : A compte $\binom{4}{2} = 6$ tirages, donc $p(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.
- (b) Deux blanches : $\binom{4}{2} = 6$ tirages ; deux noires : $\binom{2}{2} = 1$ tirage. Donc $p(B) = \frac{6+1}{15} = \frac{7}{15}$.
- (c) $A \cap B$: deux boules de même couleur portant le numéro 1, donc deux blanches numérotées 1 (il n'y a qu'une noire numérotée 1) : $\binom{3}{2} = 3$ tirages, $p(A \cap B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Or $p(A) \times p(B) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{14}{75} \neq \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$. Donc A et B ne sont pas indépendants.
2. (a) On répète 3 fois, de façon identique et indépendante, une expérience dont le succès « A est réalisé » a pour probabilité $p = \frac{2}{5}$. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{5}$: $p(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}$. $p(X = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$; $p(X = 1) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{9}{25} = \frac{54}{125}$; $p(X = 2) = 3 \times \frac{4}{25} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$; $p(X = 3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$.

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

(Vérification : $27 + 54 + 36 + 8 = 125$.)

(b) $E(X) = np = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ (ou directement $E(X) = \frac{0 \times 27 + 1 \times 54 + 2 \times 36 + 3 \times 8}{125} = \frac{150}{125} = \frac{6}{5}$).

Problème d'analyse

Solution 4.

Partie I.

1. (a) Sur le graphique, la courbe $(\mathcal{C}_g)$ est strictement au-dessus de $(\mathcal{C}_h)$ sur $]0, +\infty[$ (les deux courbes ne se coupent pas), donc $g(x) - h(x) > 0$, soit $x^2 - (2 \ln x - (\ln x)^2) > 0$ pour tout

$x > 0$.

- (b) Pour $x > 0$, $x^2 > 0$; en divisant l'inégalité $2 \ln x - (\ln x)^2 < x^2$ par $x^2 : \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$.
2. (a) H est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $H'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x^2} - 1 = \ln x$. Donc H est une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$, et $\int_1^{e^2} \ln(x) dx = [x \ln x - x]_1^{e^2} = (e^2 \times 2 - e^2) - (0 - 1) = e^2 + 1$.
- (b) Posons $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$; alors $u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ et $v(x) = x$, fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1, e^2]$. Par intégration par parties : $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \times \frac{2 \ln x}{x} dx = e^2 \times 4 - 0 - 2 \int_1^{e^2} \ln x dx = 4e^2 - 2(1 + e^2) = 2e^2 - 2$.
- (c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x(2 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$. La courbe $(\mathcal{C}_h)$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(1, 0)$ et $(e^2, 0)$.
- (d) Pour $x \in [1, e^2]$, $0 \leq \ln x \leq 2$ donc $h(x) = \ln x(2 - \ln x) \geq 0$: la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses. L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \int_1^{e^2} h(x) dx = 2 \int_1^{e^2} \ln x dx - \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = 2(1 + e^2) - (2e^2 - 2) = 4$ unités d'aire.

Partie II.

1. (a) Quand $x \rightarrow 0^+ : \ln x \rightarrow -\infty$ donc $(\ln x)^2 \rightarrow +\infty$, et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$; ainsi $\frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow +\infty$ et $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 0 - \infty = -\infty$. Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.
- (b) Posons $t = \sqrt{x}$, c'est-à-dire $x = t^2$; quand $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$ et $\ln x = 2 \ln t$, donc $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{4(\ln t)^2}{t^2} = 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ (croissances comparées), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty$.
- (c) $f(x) - x = -\frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (question (b)). Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
2. (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme et quotient de fonctions dérivables, dénominateur non nul). La dérivée de $x \mapsto (\ln x)^2$ est $2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$.
- (b) D'après la partie I, question 1)(b) : $\frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$ pour tout $x > 0$, donc $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
3. (a) f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$.
- (b) $f(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{(\ln e^{-1})^2}{e^{-1}} = \frac{1}{e} - (-1)^2 e = \frac{1}{e} - e < 0$ et $f(1) = 1 - 0 = 1 > 0$. Comme f est strictement croissante et $f(e^{-1}) < 0 = f(\alpha) < f(1)$, on a $e^{-1} < \alpha < 1$. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{(\ln \alpha)^2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 = (\ln \alpha)^2 \Leftrightarrow \ln \alpha = \alpha$ ou $\ln \alpha = -\alpha$. Or $0 < \alpha < 1$ donne $\ln \alpha < 0 < \alpha$, donc $\ln \alpha \neq \alpha$; par conséquent $\ln \alpha = -\alpha$.
- (c) Pour tout $x > 0 : f(x) - x = -\frac{(\ln x)^2}{x} \leq 0$ car $(\ln x)^2 \geq 0$ et $x > 0$. Donc $f(x) \leq x$.
- (d) $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1 - \frac{0-0}{1} = 1$. La tangente en 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = (x - 1) + 1 = x$. Donc $(T) : y = x$.
4. (a) φ est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$ (restriction de f), donc elle réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $J = \varphi(]0, 1]) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)] =]-\infty, 1]$. Ainsi φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur $J =]-\infty, 1]$.
- (b) $\alpha \in]0, 1]$ et $\varphi(\alpha) = f(\alpha) = 0$. φ est dérivable en α et, en utilisant $\ln \alpha = -\alpha : \varphi'(\alpha) = 1 - \frac{2 \ln \alpha - (\ln \alpha)^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{2}{\alpha} + 1 = 2 + \frac{2}{\alpha} = \frac{2\alpha + 2}{\alpha} \neq 0$. Donc φ^{-1} est dérivable en $\varphi(\alpha) = 0$ et $(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{\varphi'(\alpha)} = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}$.
- (c) La courbe de φ^{-1} est la symétrique de la courbe de φ (partie de $(\mathcal{C}_f)$ correspondant à $0 < x \leq 1$) par rapport à la droite $y = x$: elle est définie sur $] -\infty, 1]$, passe par $(0, \alpha)$ avec $\alpha \approx 0,57$ et par $(1, 1)$ où elle est tangente à la droite $y = x$, elle est croissante et admet l'axe

des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$ (symétrique de l'asymptote verticale $x = 0$).

Partie III.

1. **Initialisation** : $u_0 = e > 1$. **Hérédité** : supposons $1 < u_n$. Comme f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $f(u_n) > f(1) = 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$. **Conclusion** : $1 < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ d'après la question Partie II-3-c (appliquée à $x = u_n > 0$). La suite (u_n) est décroissante.
(b) (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle est convergente.
(c) Soit $l = \lim u_n$; comme $u_n > 1$ pour tout n , $l \geq 1$. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $f(l) = l$, soit $\frac{(\ln l)^2}{l} = 0$, donc $\ln l = 0$ et $l = 1$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.