

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2024 (épreuve officielle RS 22F)

Géométrie dans l'espace

Solution 1.

1. (a) $1 + 0 - 1 = 0$, donc $A(1, 1, 0) \in (P)$. D'après l'équation $x + 0y + z - 1 = 0$, le vecteur $\vec{n}(1, 0, 1)$ est normal à (P) .
 (b) $\vec{\Omega A}(1 - (-1), 1 - 1, 0 - (-2)) = (2, 0, 2) = 2\vec{n}$. Le vecteur $\vec{\Omega A}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ de (P) , donc la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P) .
2. (a) $x^2 + 2x + y^2 - 2y + z^2 + 4z - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 + (z + 2)^2 - 4 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$. Donc (S) est la sphère de centre $\Omega(-1, 1, -2)$ et de rayon $R = 3$.
 (b) $d(\Omega, (P)) = \frac{|-1+(-2)-1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Comme $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < 3 = R$, le plan (P) coupe (S) suivant un cercle dont le centre est le projeté orthogonal de Ω sur (P) . Or $A \in (P)$ et $(\Omega A) \perp (P)$ (question 1), donc ce projeté est A : le cercle a pour centre A , et pour rayon $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, (P))^2} = \sqrt{9 - 8} = 1$.
3. (a) $1 + 1 + m \times 0 - 2 = 0$ pour tout réel m , donc $A \in (Q_m)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.
 (b) (Q_m) a pour vecteur normal $\vec{n}_m(1, 1, m)$. Les plans (Q_m) et (P) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}_m \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \times 1 + 1 \times 0 + m \times 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.
 (c) Un plan (Q_m) (qui contient A) coupe (S) suivant un cercle de centre A si et seulement si A est le projeté orthogonal de Ω sur (Q_m) , c'est-à-dire si et seulement si $\vec{\Omega A}(2, 0, 2)$ est colinéaire à $\vec{n}_m(1, 1, m)$. Or la deuxième coordonnée de $\vec{\Omega A}$ est nulle alors que celle de $\vec{n}_m$ vaut 1 : ces vecteurs ne sont jamais colinéaires. Il n'existe donc aucun plan (Q_m) coupant (S) suivant un cercle de centre A .

Nombres complexes

Solution 2.

I)

1. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 16 - 36 = -20$. Et $(2i\sqrt{5})^2 = 4i^2 \times 5 = -20$. Donc $\Delta = (2i\sqrt{5})^2$.
2. $\Delta < 0$: l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{4+2i\sqrt{5}}{2} = 2 + i\sqrt{5}$ et $z_2 = \frac{4-2i\sqrt{5}}{2} = 2 - i\sqrt{5}$. Donc $S = \{2 + i\sqrt{5}, 2 - i\sqrt{5}\}$.

II)

1. (a) $|a| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$.
 (b) $b = \bar{a}$, donc $OB = |b| = |\bar{a}| = |a| = OA = 3$. Le triangle OAB est isocèle en O .

2. (a) $a - c = 2 + i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} = \sqrt{5}(1 + i)$ et $b - c = \sqrt{5}(1 - i)$. Donc $\frac{a-c}{b-c} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$.
- (b) $\left|\frac{a-c}{b-c}\right| = |i| = 1$, donc $CA = CB$; et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Le triangle ABC est donc isocèle et rectangle en C .
3. (a) D est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$, donc $d = b + (a - c) = 2 - i\sqrt{5} + \sqrt{5}(1 + i) = 2 + \sqrt{5}$.
- (b) Par construction $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$, donc le quadrilatère $ADBC$ (de sommets A, D, B, C dans cet ordre) est un parallélogramme (ses côtés $[CA]$ et $[BD]$ sont parallèles et de même longueur). D'après 2)(b), ce parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux ($CA = CB$) et un angle droit en C : c'est un carré.
4. (a) $x_n \overline{x_n} = |x_n|^2 = \left(\frac{|a|}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{3}\right)^{2n} = 1$.
- (b) $\overline{y_n} = \frac{1}{1-\overline{x_n}}$, donc $y_n + \overline{y_n} = \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{1-\overline{x_n}} = \frac{1-\overline{x_n}+1-x_n}{(1-x_n)(1-\overline{x_n})} = \frac{2-x_n-\overline{x_n}}{1-x_n-\overline{x_n}+x_n\overline{x_n}} = \frac{2-x_n-\overline{x_n}}{2-x_n-\overline{x_n}} = 1$ (en utilisant $x_n \overline{x_n} = 1$). Comme $y_n + \overline{y_n} = 2 \operatorname{Re}(y_n)$, on obtient $\operatorname{Re}(y_n) = \frac{1}{2}$.

Calcul des probabilités

Solution 3.

Les tirages sont successifs et sans remise : un tirage est un arrangement de 3 boules parmi 8, et tous les tirages sont équiprobables.

1. Nombre de tirages : $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
2. A : trois boules blanches parmi les quatre, dans l'ordre : $4 \times 3 \times 2 = 24$ tirages. $p(A) = \frac{24}{336} = \frac{1}{14}$.
3. B = « trois blanches » ou « trois noires » (il n'y a qu'une boule verte). Trois noires : $3 \times 2 \times 1 = 6$ tirages. Donc $p(B) = \frac{24+6}{336} = \frac{30}{336} = \frac{5}{56}$.
4. C est l'évènement contraire de B (au moins deux couleurs différentes, c'est-à-dire pas toutes de la même couleur). $p(C) = 1 - p(B) = 1 - \frac{5}{56} = \frac{51}{56}$.

Problème d'analyse

Solution 4.

Partie I.

1. (a) Sur la figure, pour tout x de $] -1, +\infty[$, la courbe $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessous de $(\mathcal{C}_h)$, elle-même au-dessous de la droite $y = x$ (les trois se touchent seulement en O). Donc $g(x) \leq h(x) \leq x$, soit $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$.
- (b) Pour $x > -1$, $1+x > 0$; en multipliant l'inégalité $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$ par $1+x > 0$: $x \leq (1+x) \ln(1+x)$, soit $(1+x) \ln(1+x) - x \geq 0$.
- (c) Pour tout réel x , $e^x > 0 > -1$, donc on peut appliquer (b) à e^x : $(1+e^x) \ln(1+e^x) - e^x \geq 0$, c'est-à-dire $e^x - (1+e^x) \ln(1+e^x) \leq 0$.
2. (a) **Initialisation** : $u_0 = 1$, donc $0 < u_0 \leq 1$. **Hérédité** : supposons $0 < u_n \leq 1$. Alors $1 + u_n > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} > 0$; de plus $u_n < 1 + u_n$ donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} < 1$. Ainsi $0 < u_{n+1} \leq 1$.
1. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.

- (b) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$. D'après 1)(a), pour tout $x > -1 : \frac{x}{1+x} \leq x$, donc $g(u_n) \leq u_n$ (car $u_n > -1$). Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$: la suite (u_n) est décroissante.
- (c) (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge (théorème de convergence des suites monotones).
- (d) Soit $l = \lim u_n$; comme $0 < u_n \leq 1$, $l \in [0, 1]$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, donc l vérifie $g(l) = l : \frac{l}{1+l} = l \Leftrightarrow l = l(1+l) \Leftrightarrow l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. (On peut aussi vérifier par récurrence que $u_n = \frac{1}{n+1}$.)

Partie II.

- (a) $f(0) = e^0 \ln(1 + e^0) = \ln 2$. Pour tout $x \in \mathbb{R} : e^{-x} > 0$ et $1 + e^x > 1$ donc $\ln(1 + e^x) > 0$; ainsi $f(x) > 0$.

(b) Posons $t = e^x$; quand $x \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow 0^+$ et $f(x) = \frac{\ln(1+t)}{t}$. Or $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ (limite usuelle, nombre dérivé de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0). Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. Interprétation : la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

(c) Pour tout $x : 1 + e^x = e^x(1 + e^{-x})$, donc $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ et $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$. Quand $x \rightarrow +\infty : xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ (croissances comparées), $e^{-x} \rightarrow 0$ et $\ln(1 + e^{-x}) \rightarrow \ln 1 = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Interprétation : l'axe des abscisses (droite $y = 0$) est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. $(e^{-x})' = -e^{-x}$ et $(\ln(1 + e^x))' = \frac{e^x}{1+e^x}$, donc $f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \times \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} - e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

(b) En réduisant au même dénominateur $e^x(1 + e^x) : \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}$ et $e^{-x} \ln(1 + e^x) = \frac{(1+e^x) \ln(1+e^x)}{e^x(1+e^x)}$. Donc $f'(x) = \frac{e^x - (1+e^x) \ln(1+e^x)}{e^x(1+e^x)}$.

(c) Le dénominateur $e^x(1 + e^x)$ est strictement positif. D'après la question 1)(c) de la partie I, le numérateur $e^x - (1 + e^x) \ln(1 + e^x)$ est négatif ou nul ; il est en fait strictement négatif : l'égalité $(1+t) \ln(1+t) = t$ n'a lieu que pour $t = 0$ (sur la figure, $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ ne se touchent qu'en O), et $t = e^x \neq 0$. Donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} : f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- (a) $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ avec $f(0) = \ln 2$ et $f'(0) = \frac{1}{2} - \ln 2$. Donc $(T) : y = (\frac{1}{2} - \ln 2)x + \ln 2$.

(b) Pour $x = 1 : y = \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 2 = \frac{1}{2}$. Donc $A(1, \frac{1}{2}) \in (T)$.

(c) Construction : (T) passe par $(0; 0,7)$ et $(1; 0,5)$. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est strictement décroissante, au-dessus de l'axe des abscisses, avec les asymptotes $y = 1$ en $-\infty$ et $y = 0$ en $+\infty$; elle passe par $(0; 0,7)$ où elle est tangente à (T) , par $(1; 0,48)$ environ et $(2; 0,29)$ environ, et par $(-2; 0,94)$ environ.
- (a) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[=]0, 1[$. Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]0, 1[$.

(b) $\ln 2 = f(0)$ et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \frac{1}{2} - \ln 2 \neq 0$ (car $\ln 2 \approx 0,69 \neq 0,5$). Donc f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et $(f^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln 2} = \frac{2}{1 - 2 \ln 2}$.

(c) En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-x} > 0 : \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

(d) La fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ est strictement positive et a pour dérivée $-e^{-x}$, donc $x \mapsto -\ln(1 + e^{-x})$ est une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Ainsi $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^\lambda \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = [-\ln(1 + e^{-x})]_0^\lambda = -\ln(1 + e^{-\lambda}) + \ln 2 = \ln(2) - \ln(1 + e^{-\lambda})$.

(e) D'après 2)(a), $f'(x) = \frac{1}{1+e^x} - f(x)$, donc $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$ pour tout x . Par linéarité de l'intégrale : $\int_0^\lambda f(x) dx = \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx - \int_0^\lambda f'(x) dx = \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx - [f(x)]_0^\lambda = \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx - f(\lambda) + f(0)$, soit $\int_0^\lambda f(x) dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$.

(f) Comme $f > 0$ sur $[0, \lambda]$, l'aire cherchée est, en unités d'aire, $\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda f(x) dx$. D'après

- (b) et (c) : $\mathcal{A}_\lambda = \ln 2 - f(\lambda) + \ln 2 - \ln(1 + e^{-\lambda}) = 2 \ln 2 - e^{-\lambda} \ln(1 + e^\lambda) - \ln(1 + e^{-\lambda})$.
- (e) Quand $\lambda \rightarrow +\infty$: $f(\lambda) \rightarrow 0$ (question 1)(c)) et $e^{-\lambda} \rightarrow 0$ donc $\ln(1 + e^{-\lambda}) \rightarrow 0$. Ainsi $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda = 2 \ln 2 = \ln 4$.