

Examen national : Mathématiques

Session normale 2024 (épreuve officielle NS 22F)

Durée : 3 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient. L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter. L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème, indépendants entre eux. Barème : 3 + 3 + 4 + 2 + 8 points. On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module ; $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Suites numériques

Exercice 1 (3 points). On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n .

1. (a) Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n . (0,25 pt)
 (b) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n . (0,5 pt)
2. (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n . (0,25 pt)
 (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente. (0,5 pt)
3. Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \frac{2 - u_n}{1 - u_n}$, pour tout entier naturel n .
 (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}$, pour tout entier naturel n . (0,5 pt)
 (c) Calculer la limite de la suite (u_n) . (0,5 pt)

Géométrie dans l'espace

Exercice 2 (3 points). Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 5.

1. Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) . (0,25 pt)
2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) . (0,25 pt)
3. (a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega, (P)) = 3$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer. (0,5 pt)
4. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P) . (0,5 pt)
 (b) Montrer que le point $H(0, 1, -1)$ est le centre du cercle (Γ) . (0,5 pt)
 (c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$. (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 3 (4 points). Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3}(1 - i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

- Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$. (0,5 pt)
- (a) Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ puis vérifier que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$. (0,75 pt)
(b) En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel. (0,75 pt)
- Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$.
(a) Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$ et que $\arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12} [2\pi]$ où a' est l'affixe du point A' . (0,5 pt)
(b) Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O , A'' et B sont alignés. (0,5 pt)
(c) Montrer que b' , l'affixe du point B' , vérifie $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$. (0,5 pt)
(d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O . (0,5 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 4 (2 points). Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

- Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$, où A est l'évènement « les deux boules tirées portent le même numéro ». (0,5 pt)
- Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$, où B est l'évènement « la somme des numéros des boules tirées est 4 ». (0,5 pt)
- Calculer $p(A \cap B)$. (0,5 pt)
- Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier. (0,5 pt)

Problème d'analyse

Exercice 5 (8 points). Partie I. On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$.

- Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v . (0,5 pt)
- Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u) , la courbe (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0,5 pt)

Partie II. On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

- (a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$. (0,5 pt)
(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat. (0,5 pt)
- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,25 pt)
(b) Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$. (0,5 pt)

- (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$. (0,75 pt)
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1-x}{e^x-x}$. (0,5 pt)
 (b) Étudier le signe de la fonction dérivée de f , puis déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
 (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $] -1, 0[$. (0,75 pt)
4. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
 [Figure : dans un repère orthonormé gradué de -4 à 4 en abscisses et de -3 à 4 en ordonnées, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite d'équation $y = x$ sont tracées. La courbe est croissante sur $] -\infty, 1]$, passe par le point $(0, 1)$, atteint son maximum au point d'abscisse 1 (d'ordonnée voisine de $1,46$), puis décroît lentement vers l'asymptote horizontale $y = 1$. Elle coupe la droite $y = x$ en deux points : l'un d'abscisse négative (voisine de $-2,6$), l'autre d'abscisse positive (voisine de $1,4$).]
 (a) Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β . (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$. (0,5 pt)
5. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =] -\infty, 1]$.
 (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$.) (0,5 pt)
 (b) Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$. (0,75 pt)