

Examen national : Corrigé

Session normale 2024 (épreuve officielle NS 22F)

Suites numériques

Solution 1.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4 - \frac{6}{1+u_n} = \frac{4(1+u_n)-6}{1+u_n} = \frac{4u_n-2}{1+u_n} = u_{n+1}$.

(b) **Initialisation** : $u_0 = 4$, donc $2 \leq u_0 \leq 4$. **Hérédité** : supposons $2 \leq u_n \leq 4$ pour un entier n . Alors $3 \leq 1+u_n \leq 5$, donc $\frac{6}{5} \leq \frac{6}{1+u_n} \leq 2$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$), d'où $4 - 2 \leq 4 - \frac{6}{1+u_n} \leq 4 - \frac{6}{5}$, c'est-à-dire $2 \leq u_{n+1} \leq \frac{14}{5} \leq 4$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 4$.
- (a) $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n-2}{1+u_n} - u_n = \frac{4u_n-2-u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{-u_n^2+3u_n-2}{1+u_n}$. Or $(u_n-1)(2-u_n) = 2u_n - u_n^2 - 2 + u_n = -u_n^2 + 3u_n - 2$. Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$.

(b) D'après 1)(b), $2 \leq u_n \leq 4$, donc $u_n - 1 > 0$, $2 - u_n \leq 0$ et $1 + u_n > 0$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n . La suite (u_n) est décroissante. Elle est décroissante et minorée par 2, donc elle est convergente (théorème de convergence des suites monotones).
- (a) Comme $u_n \geq 2$, $1 - u_n \neq 0$ et v_n est bien défini. Pour tout n : $2 - u_{n+1} = 2 - \frac{4u_n-2}{1+u_n} = \frac{2+2u_n-4u_n+2}{1+u_n} = \frac{4-2u_n}{1+u_n} = \frac{2(2-u_n)}{1+u_n}$ et $1 - u_{n+1} = \frac{1+u_n-4u_n+2}{1+u_n} = \frac{3-3u_n}{1+u_n} = \frac{3(1-u_n)}{1+u_n}$. Donc $v_{n+1} = \frac{2-u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{2(2-u_n)}{3(1-u_n)} = \frac{2}{3}v_n$. (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, de premier terme $v_0 = \frac{2-4}{1-4} = \frac{2}{3}$.

(b) Pour tout n : $v_n = v_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. De $v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n}$ on tire $v_n(1-u_n) = 2-u_n$, soit $u_n(1-v_n) = 2-v_n$. Comme $v_n \neq 1$ (car $0 < v_n < 1$), $u_n = \frac{2-v_n}{1-v_n} = \frac{1+(1-v_n)}{1-v_n} = 1 + \frac{1}{1-v_n}$, donc $u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$.

(c) Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 + \frac{1}{1-0} = 2$.

Géométrie dans l'espace

Solution 2.

- Le plan (P) a pour vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 1)$, donc une équation de la forme $2x - 2y + z + d = 0$. Comme $A(-1, 0, -1) \in (P)$: $-2 - 0 - 1 + d = 0$, d'où $d = 3$. Ainsi $(P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$.
- $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$, soit $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.
- (a) $d(\Omega, (P)) = \frac{|2 \times 2 - 2 \times (-1) + 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$.

(b) Comme $d(\Omega, (P)) = 3 < 5 = R$, le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

4. (a) (Δ) passe par $\Omega(2, -1, 0)$ et est dirigée par $\vec{n}(2, -2, 1)$ (vecteur normal à (P)) : (Δ) :

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-2t \\ z=t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$
- (b) Le centre du cercle (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur (P) , c'est-à-dire le point d'intersection de (Δ) et (P) . On remplace dans l'équation de (P) : $2(2+2t) - 2(-1-2t) + t + 3 = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1$, ce qui donne le point $(0, 1, -1) = H$. Donc H est le centre de (Γ) .
- (c) Le milieu de $[AB]$ est $(\frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-1-1}{2}) = (0, 1, -1) = H$, qui appartient à (Δ) . De plus $\overrightarrow{AB}(2, 2, 0)$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 4 - 4 + 0 = 0$, donc (Δ) est perpendiculaire à (AB) . La droite (Δ) passe par le milieu de $[AB]$ et lui est perpendiculaire : c'est une médiatrice du segment $[AB]$.

Nombres complexes

Solution 3.

1. $|a| = \sqrt{3}|1-i| = \sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6}$. Puis $a = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{6}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$, donc $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$.
2. (a) $\frac{b}{a} = \frac{2+\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}(1-i)} = \frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{\sqrt{3}(1-i)(1+i)} = \frac{2+\sqrt{3}+i+2i+\sqrt{3}i-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i}{2\sqrt{3}}$. Or $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{6}$ et $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Donc $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$. Ensuite $\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}+3}{6}i = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = \frac{b}{a}$.
- (b) $b = a \times \frac{b}{a} = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}{3}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$ (car $\frac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}{3} = \sqrt{6} + \frac{\sqrt{18}}{3} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$). Donc $b = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$. Alors $b^{24} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24}e^{i24\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24}e^{2i\pi} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{24}$, qui est un nombre réel.
3. (a) L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ est $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z = (\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$. Ainsi $a' = e^{i\frac{\pi}{6}}a$, donc $\arg(a') \equiv \arg(a) + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{12} [2\pi]$.
- (b) $a'' = e^{i\frac{\pi}{6}}a' = e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{6}}a = e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{6}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$. D'après 2)(b), $b = (\sqrt{6} + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$, donc $\frac{a''}{b} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$: les vecteurs $\overrightarrow{OA''}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires, donc les points O, A'' et B sont alignés.
- (c) $b' = e^{i\frac{\pi}{6}}b = e^{i\frac{\pi}{6}} \times a \times \frac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \times a = \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}a = \frac{3+\sqrt{3}}{3}ia$. Or $ia = i\sqrt{3}(1-i) = \sqrt{3}(i+1) = \sqrt{3}(1+i) = \bar{a}$. Donc $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$.
- (d) D'après (c), $\frac{b'}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}i$, donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}) \equiv \arg\left(\frac{b'}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Les droites (OA) et (OB') sont perpendiculaires : le triangle OAB' est rectangle en O .

Calcul des probabilités

Solution 4.

Le tirage est simultané : l'univers est l'ensemble des combinaisons de 2 boules parmi 7, équiprobables, de cardinal $\binom{7}{2} = 21$.

1. A est réalisé si les deux boules portent le numéro 1 ($\binom{4}{2} = 6$ tirages) ou le numéro 2 ($\binom{2}{2} = 1$ tirage) ; il n'y a qu'une boule numérotée 3. Donc $p(A) = \frac{6+1}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

2. La somme vaut 4 pour les tirages $(1, 3) : 4 \times 1 = 4$ tirages, et $(2, 2) : \binom{2}{2} = 1$ tirage. Donc $p(B) = \frac{4+1}{21} = \frac{5}{21}$.
3. $A \cap B$: mêmes numéros et somme 4, donc les deux boules portent le numéro 2 : 1 tirage. $p(A \cap B) = \frac{1}{21}$.
4. $p(A) \times p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{21} = \frac{5}{63} \neq \frac{1}{21} = p(A \cap B)$. Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Problème d'analyse

Solution 5.

Partie I.

1. $(\mathcal{C}_u)$ est la courbe de l'exponentielle : croissante, passant par $(0, 1)$ et $(1, e)$, d'asymptote l'axe des abscisses en $-\infty$; $(\mathcal{C}_v)$ est la première bissectrice $y = x$. On les trace dans un même repère orthonormé.
2. Sur le graphique, la courbe $(\mathcal{C}_u)$ est entièrement au-dessus de la droite $(\mathcal{C}_v)$ (les deux courbes ne se coupent pas), donc $u(x) > v(x)$, c'est-à-dire $e^x - x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Comme $u \geq v$ sur $[0, 1]$, l'aire cherchée vaut, en unités d'aire : $\mathcal{A} = \int_0^1 (e^x - x) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = (e - \frac{1}{2}) - 1 = e - \frac{3}{2}$.

Partie II.

1. (a) $f(x)$ existe si et seulement si $e^x - x > 0$, ce qui est vrai pour tout réel x d'après la partie I. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
 (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x = e^x(1 - xe^{-x})$ avec $e^x > 0$ et $1 - xe^{-x} > 0$ (quotient de $e^x - x > 0$ par e^x). Donc $\ln(e^x - x) = \ln(e^x) + \ln(1 - xe^{-x}) = x + \ln(1 - xe^{-x})$ et $f(x) = x + 1 - x - \ln(1 - xe^{-x}) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^{-x}) = 1$ et, par continuité de $\ln$ en 1, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \ln 1 = 1$. Interprétation : la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
2. (a) Quand $x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$ et $-x \rightarrow +\infty$, donc $e^x - x \rightarrow +\infty$ et $\ln(e^x - x) \rightarrow +\infty$. Écrivons $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$: $xe^{-x} \rightarrow -\infty$ (produit de $x \rightarrow -\infty$ par $e^{-x} \rightarrow +\infty$), donc $1 - xe^{-x} \rightarrow +\infty$, $\ln(1 - xe^{-x}) \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 (b) Pour $x < 0$: $e^x - x = -x(\frac{e^x}{-x} + 1) = (-x)(1 - \frac{e^x}{x}) = (-x)(1 - \frac{1}{xe^{-x}})$ car $\frac{e^x}{x} = \frac{1}{xe^{-x}}$. Comme $-x > 0$ et $1 - \frac{1}{xe^{-x}} = \frac{xe^{-x} - 1}{xe^{-x}} > 0$, on a $\ln(e^x - x) = \ln(-x) + \ln(1 - \frac{1}{xe^{-x}})$, d'où $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln(1 - \frac{1}{xe^{-x}})$.
 (c) Pour $x < 0$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(-x)}{x} - \frac{\ln(1 - \frac{1}{xe^{-x}})}{x}$. Posons $t = -x \rightarrow +\infty$: $\frac{\ln(-x)}{x} = -\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0$ (croissances comparées). De plus $xe^{-x} \rightarrow -\infty$, donc $\frac{1}{xe^{-x}} \rightarrow 0$ et $\ln(1 - \frac{1}{xe^{-x}}) \rightarrow \ln 1 = 0$, d'où le dernier quotient tend vers 0. Enfin $\frac{1}{x} \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, étudions $f(x) - x = 1 - \ln(-x) - \ln(1 - \frac{1}{xe^{-x}})$: $\ln(-x) \rightarrow +\infty$ et le dernier terme tend vers 0, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = -\infty$. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet donc une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.
3. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée et somme de fonctions dérivables, avec $e^x - x > 0$) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{e^x - x - e^x + 1}{e^x - x} = \frac{1 - x}{e^x - x}$.
 (b) Le dénominateur $e^x - x$ est strictement positif (partie I), donc $f'(x)$ a le signe de $1 - x$:

$f'(x) > 0$ pour $x < 1$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 1$. f est donc strictement croissante sur $] -\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Son maximum est $f(1) = 2 - \ln(e - 1)$. Tableau de variations : f croît de $-\infty$ (en $-\infty$) jusqu'à $f(1) = 2 - \ln(e - 1)$, puis décroît vers 1 (en $+\infty$).

(c) f est continue et strictement croissante sur $[-1, 0]$. $f(-1) = -\ln(e^{-1} + 1) < 0$ car $e^{-1} + 1 > 1$, et $f(0) = 1 - \ln 1 = 1 > 0$. Comme $0 \in]f(-1), f(0)[$, le théorème des valeurs intermédiaires (cas d'une fonction strictement monotone) assure que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $] -1, 0[$.

4. (a) Les solutions de $f(x) = x$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite d'équation $y = x$. Sur la figure, cette droite coupe $(\mathcal{C}_f)$ en exactement deux points, d'abscisses $\alpha < 0$ et $\beta > 0$: l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β .

(b) $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha + 1 - \ln(e^\alpha - \alpha) = \alpha \Leftrightarrow \ln(e^\alpha - \alpha) = 1 \Leftrightarrow e^\alpha - \alpha = e$. De même $e^\beta - \beta = e$. En soustrayant : $e^\alpha - \alpha - (e^\beta - \beta) = 0$, c'est-à-dire $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$.

5. (a) g est continue et strictement croissante sur $I =] -\infty, 1]$ (question 3)(b)), donc g réalise une bijection de I sur $J = g(I) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] =] -\infty, 2 - \ln(e - 1)]$. Ainsi g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J =] -\infty, 2 - \ln(e - 1)]$.

(b) On a $g(0) = f(0) = 1$ et $g'(0) = f'(0) = \frac{1-0}{e^0-0} = 1 \neq 0$. Comme g est dérivable en 0 avec $g'(0) \neq 0$, g^{-1} est dérivable en $g(0) = 1$ et $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(0)} = 1$.