

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2023 (épreuve officielle RS 22F)

Suites numériques

Solution 1.

1. Par récurrence. **Initialisation** : $u_0 = 0 > -1$. **Hérédité** : supposons $u_n > -1$; alors $2u_n + 5 > 3 > 0$ et $u_{n+1} + 1 = \frac{u_n - 2 + 2u_n + 5}{2u_n + 5} = \frac{3(u_n + 1)}{2u_n + 5} > 0$, donc $u_{n+1} > -1$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$.
2. Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 2 - u_n(2u_n + 5)}{2u_n + 5} = \frac{-2u_n^2 - 4u_n - 2}{2u_n + 5} = \frac{-2(u_n + 1)^2}{2u_n + 5} < 0$ (le numérateur est strictement négatif car $u_n \neq -1$, et $2u_n + 5 > 0$). La suite (u_n) est donc strictement décroissante ; comme elle est minorée par -1 , elle est convergente (théorème de convergence monotone).
3. (a) v_n est bien défini car $1 + u_n > 0$. Pour tout n : $v_{n+1} = \frac{3}{1 + u_{n+1}} = \frac{3}{\frac{3(u_n + 1)}{2u_n + 5}} = \frac{2u_n + 5}{u_n + 1} = \frac{2(u_n + 1) + 3}{u_n + 1} = 2 + \frac{3}{u_n + 1} = v_n + 2$. Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \frac{3}{1+0} = 3$.
(b) $v_n = v_0 + 2n = 2n + 3$. De $v_n = \frac{3}{1 + u_n}$ on tire $1 + u_n = \frac{3}{v_n}$, donc $u_n = \frac{3}{2n + 3} - 1 = \frac{-2n}{2n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{2n + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2 + \frac{3}{n}} = -1$.
4. (a) $w_n = e^{3 - v_n} = e^{3 - 2n - 3} = e^{-2n} = (e^{-2})^n$. Donc $w_{n+1} = e^{-2} w_n$: (w_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-2}$ et de premier terme $w_0 = e^0 = 1$.
(b) $S_n = w_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}$. Comme $0 < e^{-2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2(n+1)} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - e^{-2}} = \frac{e^2}{e^2 - 1}$.

Géométrie dans l'espace

Solution 2.

1. (a) $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}(1, 2, 2)$, $\overrightarrow{AB}(-4, -1, 3)$ et $\overrightarrow{AC}(2, -6, 5)$. Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = ((-1) \times 5 - 3 \times (-6))\vec{i} - ((-4) \times 5 - 3 \times 2)\vec{j} + ((-4) \times (-6) - (-1) \times 2)\vec{k} = 13\vec{i} + 26\vec{j} + 26\vec{k} = 13\vec{u}$. Ce produit vectoriel est non nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A , B et C ne sont pas alignés.
(b) $\vec{u}(1, 2, 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) , qui a donc une équation de la forme $x + 2y + 2z + d = 0$; $A \in (ABC)$ donne $2 + 2 + 4 + d = 0$, soit $d = -8$. Donc $(ABC) : x + 2y + 2z - 8 = 0$.
(c) $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 - 2 + 0 - 8|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{3} = 3 = R$: le plan (ABC) est tangent à (S) . De plus $A \in (ABC)$ et $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{u}$ est normal au plan : A est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC) , donc le point de contact. Le plan (ABC) est tangent à (S) au point A (on vérifie : $\Omega A = \|\vec{u}\| = 3 = R$).

2. (a) (Δ) passe par A et est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(3, 4, 1)$ de $(P) : (\Delta) : x = 2 + 3t, y = 1 + 4t, z = 2 + t$ ($t \in \mathbb{R}$). Un point de (Δ) appartient à (P) si et seulement si $3(2 + 3t) + 4(1 + 4t) + (2 + t) + 1 = 0$, soit $26t + 13 = 0$, donc $t = -\frac{1}{2}$. Le point d'intersection est $H(2 - \frac{3}{2}, 1 - 2, 2 - \frac{1}{2}) = H(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2})$.
- (b) H est le milieu de $[AD]$ si et seulement si $D = 2H - A$, soit $D(1 - 2, -2 - 1, 3 - 2) = D(-1, -3, 1)$.
3. (a) $\overrightarrow{\Omega D}(-2, -2, 1)$ et $\Omega D = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 = R$, donc $D \in (S)$. Le plan (Q) passe par le point D de la sphère et est perpendiculaire au rayon $[\Omega D]$: il est tangent à (S) en D .
- (b) (Q) a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}(-2, -2, 1)$ et passe par $D : -2(x + 1) - 2(y + 3) + (z - 1) = 0$, soit $(Q) : 2x + 2y - z + 9 = 0$. $B(-2, 0, 5) : -4 + 0 - 5 + 9 = 0$ et $C(4, -5, 7) : 8 - 10 - 7 + 9 = 0$, donc $B \in (Q)$ et $C \in (Q)$. Par ailleurs B et C appartiennent à (ABC) . Les plans (Q) et (ABC) ne sont pas confondus (leurs vecteurs normaux $(2, 2, -1)$ et $(1, 2, 2)$ ne sont pas colinéaires) et ont en commun les deux points distincts B et C : ils se coupent suivant la droite (BC) .

Nombres complexes

Solution 3.

1. (a) $|a| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$ et $a = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
- (b) Par la formule de Moivre, $a^{2022} = \left(\sqrt{3}\right)^{2022}\left(\cos\left(\frac{2022\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2022\pi}{3}\right)\right)$. Or $\frac{2022\pi}{3} = 674\pi = 337 \times 2\pi$, donc $\cos\left(\frac{2022\pi}{3}\right) = 1$ et $\sin\left(\frac{2022\pi}{3}\right) = 0$. Ainsi $a^{2022} = 3^{1011}$ est un nombre réel.
2. Soit θ une mesure de l'angle de $R : z_A = e^{i\theta}z_B$, soit $a = e^{i\theta}\bar{a}$, donc $e^{i\theta} = \frac{a}{\bar{a}} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Une mesure de l'angle de la rotation R est $\frac{2\pi}{3}$.
3. (a) L'équation (E_α) , à coefficients réels, admet deux racines complexes conjuguées non réelles si et seulement si son discriminant est strictement négatif : $\Delta = 3 - 4\alpha < 0 \iff \alpha > \frac{3}{4}$. Le produit des racines de $z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$ vaut $\alpha : z\bar{z} = \alpha$.
- (b) La somme des racines vaut $z + \bar{z} = \sqrt{3}$. Alors $|z - \sqrt{3}|^2 = (z - \sqrt{3})(\bar{z} - \sqrt{3}) = z\bar{z} - \sqrt{3}(z + \bar{z}) + 3 = \alpha - 3 + 3 = \alpha = z\bar{z} = |z|^2$. Donc $|z| = |z - \sqrt{3}|$.
- (c) $|z| = OM$ et $|z - \sqrt{3}| = PM$: l'égalité (b) donne $OM = PM$, donc M appartient à la médiatrice (Δ) de $[OP]$. De même $|\bar{z}| = |z|$ et $|\bar{z} - \sqrt{3}| = |\overline{z - \sqrt{3}}| = |z - \sqrt{3}|$, donc $ON = PN$ et $N \in (\Delta)$.
- (d) D'après (b), $|z - \sqrt{3}|^2 = \alpha$, donc $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3} \iff \alpha = 3$ (valeur bien supérieure à $\frac{3}{4}$). Dans ce cas, M et N appartiennent à (Δ) et vérifient $PM = PN = \sqrt{3}$: ce sont les points d'intersection de (Δ) et du cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$ (une droite et un cercle ont au plus deux points communs, et $M \neq N$ car z n'est pas réel). Résolvons $(E_3) : z^2 - \sqrt{3}z + 3 = 0 : \Delta = 3 - 12 = -9 = (3i)^2$, donc $z = \frac{\sqrt{3}+3i}{2}$ ou $z = \frac{\sqrt{3}-3i}{2}$. Les points d'intersection sont M d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = a$ et N d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = \bar{a}$ (ce sont les points A et B de la question 2).

Calcul des probabilités

Solution 4.

- Les tirages simultanés de deux boules parmi six sont équiprobables : $\text{card } \Omega = \binom{6}{2} = 15$.
 - L'évènement contraire $\bar{A}$: « tirer deux boules blanches » a pour cardinal $\binom{4}{2} = 6$. Donc $p(A) = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.
 - $\text{card } B = \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 6 + 1 = 7$, donc $p(B) = \frac{7}{15}$.
 - On répète 5 fois, de manière indépendante, la même expérience dont le succès « B est réalisé » a la probabilité $p = \frac{7}{15}$: le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{7}{15}$. La probabilité cherchée est $\binom{5}{3} \left(\frac{7}{15}\right)^3 \left(\frac{8}{15}\right)^2 = 10 \times \frac{343}{3375} \times \frac{64}{225} = \frac{219520}{759375} = \frac{43904}{151875} \approx 0,289$.
- On s'arrête dès la première boule blanche. Comme l'urne ne contient que deux boules noires, on tire au plus deux boules noires avant une blanche : le tirage s'arrête au 1er, au 2e ou au plus tard au 3e tirage. Les valeurs prises par X sont 1 ; 2 et 3.
 - ($X = 2$) : « noire puis blanche » : $p(X = 2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.
 - $p(X = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (blanche au premier tirage) ; $p(X = 3) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ (noire, noire, puis blanche, la blanche étant alors certaine). Loi de X : $p(X = 1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, $p(X = 2) = \frac{4}{15}$, $p(X = 3) = \frac{1}{15}$ (vérification : $\frac{10}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = 1$).
 - On obtient au moins une boule noire si et seulement si le premier tirage n'est pas blanc, c'est-à-dire $X \geq 2$: $p(X \geq 2) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ (ou $1 - p(X = 1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$).

Problème d'analyse

Solution 5.

- $f(2) = (2-1)^2 e^0 = 1$. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)^2 e^{x(2-x)} = 1 \times e^0 = 1$ (fonction continue en 2 sur $] -\infty, 2]$). Pour $x > 2$, posons $t = x - 2 \rightarrow 0^+$: $(x-2)^2 \ln(x-2) = t^2 \ln t \rightarrow 0$ (limite usuelle), donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + 0 = 1$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 1$: f est continue au point 2.
- Pour $x < 2$ et $x \neq 0$, notons $X = x(2-x) \neq 0$. Alors $xe^X - x \cdot \frac{e^X - 1}{x(2-x)} = xe^X - \frac{e^X - 1}{2-x} = \frac{x(2-x)e^X - e^X + 1}{2-x} = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^X - 1}{x-2} = \frac{(x-1)^2 e^{x(2-x)} - 1}{x-2} = \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$.
 - Quand $x \rightarrow 2^-$, $X = x(2-x) \rightarrow 0$ et $\frac{e^X - 1}{X} \rightarrow 1$ (limite usuelle $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$). Donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 2e^0 - 2 \times 1 = 0$: f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = 0$.
 - Pour $x > 2$: $\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{(x-2)^2 \ln(x-2)}{x-2} = (x-2) \ln(x-2) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 2^+$ (avec $t = x - 2$, $t \ln t \rightarrow 0$). Donc f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 0$. Comme $f'_g(2) = f'_d(2) = 0$, f est dérivable en 2 et $f'(2) = 0$: la courbe (C) admet au point $(2, 1)$ une tangente horizontale.
- Pour $x \leq 2$: $x(x-2)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)} = (x^2 - 2x + 1)e^{x(2-x)} = (x-1)^2 e^{x(2-x)} = f(x)$.
 - Posons $X = x(2-x) = -x(x-2)$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $X = -x^2 + 2x = -x^2(1 - \frac{2}{x}) \rightarrow -\infty$, donc $e^X \rightarrow 0$ et $x(x-2)e^{x(2-x)} = -Xe^X \rightarrow 0$ (limite usuelle $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$). Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$: la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.
 - Pour $x > 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{(x-2)^2}{x} \ln(x-2)$; or $\frac{(x-2)^2}{x} = x(1 - \frac{2}{x})^2 \rightarrow +\infty$ et $\ln(x-2) \rightarrow +\infty$.

- 2) $\rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
4. (a) Sur $] -\infty, 2[$, f est dérivable et, avec $(e^{x(2-x)})' = (2-2x)e^{x(2-x)} = -2(x-1)e^{x(2-x)}$: $f'(x) = 2(x-1)e^{x(2-x)} - 2(x-1)^3e^{x(2-x)} = 2(x-1)e^{x(2-x)}[1 - (x-1)^2] = 2(x-1)e^{x(2-x)}(2-x)x = 2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$.
- (b) Sur $]2, +\infty[$: $f'(x) = 2(x-2)\ln(x-2) + (x-2)^2 \times \frac{1}{x-2} = (x-2)(2\ln(x-2) + 1) = (x-2)(1 + 2\ln(x-2))$.
- (c) Pour $x > 2$: $1 + 2\ln(x-2) \leq 0 \iff \ln(x-2) \leq -\frac{1}{2} \iff x-2 \leq e^{-\frac{1}{2}} \iff x \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{e}}$. L'ensemble des solutions est $]2, 2 + \frac{1}{\sqrt{e}}]$.
- (d) Sur $] -\infty, 2[$: $e^{x(2-x)} > 0$ et $2-x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x(x-1)$: $f'(x) > 0$ sur $] -\infty, 0[$, $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$, $f'(x) > 0$ sur $]1, 2[$, et $f'(0) = f'(1) = 0$. Sur $]2, +\infty[$: $x-2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 + 2\ln(x-2)$: $f'(x) < 0$ sur $]2, 2 + \frac{1}{\sqrt{e}}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2 + \frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$. Enfin $f'(2) = 0$. Tableau de variations : f est croissante sur $] -\infty, 0]$ (de 0 à $f(0) = 1$), décroissante sur $[0, 1]$ (jusqu'à $f(1) = 0$), croissante sur $[1, 2]$ (jusqu'à $f(2) = 1$), décroissante sur $[2, 2 + \frac{1}{\sqrt{e}}]$ (jusqu'à $f(2 + \frac{1}{\sqrt{e}}) = 1 + \frac{1}{e} \times (-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2e} \approx 0,82$), puis croissante sur $[2 + \frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$ vers $+\infty$.
5. Construction : asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$; maximum local $(0, 1)$; minimum $(1, 0)$ (la courbe touche l'axe des abscisses) ; maximum local $(2, 1)$ avec tangente horizontale (raccord des deux expressions) ; minimum local $(2 + \frac{1}{\sqrt{e}}, 1 - \frac{1}{2e}) \approx (2,6, 0,8)$; passage par $(3, 1)$; puis croissance rapide avec branche parabolique de direction (Oy) .
6. (a) On pose $u(x) = \ln(x-2)$ et $v(x) = (x-2)^2$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x-2}$ et $v(x) = \frac{(x-2)^3}{3}$ (fonctions dérivables à dérivées continues sur $[\lambda, 3] \subset]2, +\infty[$) : $\int_{\lambda}^3 (x-2)^2 \ln(x-2) dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} \ln(x-2) \right]_{\lambda}^3 - \int_{\lambda}^3 \frac{(x-2)^2}{3} dx = \left(0 - \frac{(\lambda-2)^3}{3} \ln(\lambda-2) \right) - \left[\frac{(x-2)^3}{9} \right]_{\lambda}^3 = -\frac{(\lambda-2)^3}{3} \ln(\lambda-2) - \frac{1}{9} + \frac{(\lambda-2)^3}{9} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2) \right)$.
- (b) Sur $[\lambda, 3] \subset]2, 3]$: $f(x) - 1 = (x-2)^2 \ln(x-2) \leq 0$ car $0 < x-2 \leq 1$ donne $\ln(x-2) \leq 0$. La courbe (C) est donc au-dessous de la droite $y = 1$ sur $[\lambda, 3]$ et $A(\lambda) = \int_{\lambda}^3 (1 - f(x)) dx = - \int_{\lambda}^3 (x-2)^2 \ln(x-2) dx = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2) \right)$ (en cm^2 , l'unité d'aire valant 1cm^2).
- (c) Quand $\lambda \rightarrow 2^+$, posons $t = \lambda - 2 \rightarrow 0^+$: $(\lambda-2)^3 = t^3 \rightarrow 0$ et $(\lambda-2)^3 \ln(\lambda-2) = t^2 \times t \ln t \rightarrow 0$. Donc $\lim_{\lambda \rightarrow 2^+} A(\lambda) = \frac{1}{9}$.