

Examen national : Mathématiques

Session normale 2023 (épreuve officielle NS 22F)

Durée : 3 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux. Le candidat peut traiter les exercices suivant l'ordre qui lui convient ; l'utilisation de la couleur rouge est à éviter. Barème : 3 + 3 + 3 + 11 points. On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module ; $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 (3 points). Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 1, 4)$, $B(2, 1, 2)$, $C(2, 5, 0)$ et $\Omega(3, 4, 4)$.

- (a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$. (0,25 pt)
(b) En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d(B, (AC))$. (0,5 pt)
- Soit D le milieu du segment $[AC]$.
(a) Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$. (0,25 pt)
(b) En déduire que $d(\Omega, (ABC)) = 3$. (0,5 pt)
- Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$.
(a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S) . (0,5 pt)
(b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera. (0,5 pt)
- Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2) . (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 2 (3 points). Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2} + i$, $c = \bar{b}$ et $d = 2i$.

- Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique. (0,25 pt)
- (a) Vérifier que $b - d = c$. (0,25 pt)
(b) Montrer que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ et déduire que les points A , B et D sont alignés. (0,5 pt)
- (a) Vérifier que $ac = 2b$. (0,25 pt)
(b) En déduire que $2 \arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. (0,5 pt)

4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' .
- (a) Montrer que $z' = \frac{1}{2}az$. (0,25 pt)
- (b) En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$. (0,5 pt)
- (c) Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$. (0,5 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (3 points). Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2. On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher. On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2 , ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ». On considère les événements suivants : A : « la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 » et B : « le produit ab est égal à 2 ».

- (a) Calculer $p(A)$; la probabilité de l'évènement A . (0,5 pt)
- (b) Montrer que $p(B) = \frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités). (0,5 pt)
- Calculer $p(A / B)$; probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. (0,75 pt)
- Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab .
 - Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{3}$. (0,25 pt)
 - Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4). (0,5 pt)
 - On considère les événements : M : « le produit ab est pair non nul » et N : « le produit ab est égal à 1 ». Montrer que les événements M et N sont équiprobables. (0,5 pt)

Problème d'analyse

Exercice 4 (11 points). On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[: f(x) = \frac{3x-2-2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$. (0,25 pt)
 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser : $t = \sqrt{x}$). (0,5 pt)
 - Déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat. (0,5 pt)
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$. (0,75 pt)
- Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{2(1-x+x \ln x)}{x^2}$. (0,5 pt)
- En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$:
[Tableau de variation de f' : sur $]0, 1]$, f' décroît de $+\infty$ (en 0^+) vers 0 (en $x = 1$) ; sur $[1, \beta]$, f' croît de 0 jusqu'à $f'(\beta)$; sur $[\beta, +\infty[$, f' décroît de $f'(\beta)$ vers 0 (en $+\infty$). On donne $\beta \approx 4,9$.]
 - Prouver que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)

- (b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
- (c) Dédire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion. (1 pt)
4. La courbe (C_g) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g : x \rightarrow f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0,3$). Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.
[Figure : courbe (C_g) dans un repère orthonormé ; (C_g) vient de $-\infty$ au voisinage de 0^+ , monte très vite, coupe l'axe des abscisses en $\alpha \approx 0,3$, atteint un maximum voisin de 0,4 entre α et 1, recoupe l'axe des abscisses en 1, puis reste au-dessous de l'axe des abscisses et décroît lentement pour $x > 1$ (par exemple $g(4) \approx -2,4$).]
- (a) À partir de la courbe (C_g) , déterminer le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
- (b) Dédire que la droite (Δ) est en dessous de (C_f) sur l'intervalle $[\alpha, 1]$ et au-dessus de (C_f) sur les intervalles $]0, \alpha]$ et $[1, +\infty[$. (0,5 pt)
5. Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prend : $\alpha \approx 0,3$, $\beta \approx 4,9$ et $f(\beta) \approx 1,9$). (1,5 pt)
6. (a) Vérifier que la fonction $x \rightarrow 2x - x \ln x$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow 1 - \ln x$ sur $[\alpha, 1]$. (0,5 pt)
- (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$. (1 pt)
- (c) Dédire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. (0,75 pt)
7. Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in]\alpha, 1[$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (a) Montrer par récurrence que $\alpha < u_n < 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,5 pt)
- (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante (on peut utiliser la question 4) b)). (0,5 pt)
- (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite. (0,75 pt)