

Examen national : Corrigé

Session normale 2023 (épreuve officielle NS 22F)

Géométrie dans l'espace

Solution 1.

- (a) $\overrightarrow{AB}(2, 0, -2)$ et $\overrightarrow{AC}(2, 4, -4)$. Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0 \times (-4) - (-2) \times 4)\vec{i} - (2 \times (-4) - (-2) \times 2)\vec{j} + (2 \times 4 - 0 \times 2)\vec{k} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$.

(b) $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 4\sqrt{4 + 1 + 4} = 12$. L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 6$ (en unités d'aire). D'autre part $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AC \times d(B, (AC))$ avec $AC = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$, donc $d(B, (AC)) = \frac{12}{6} = 2$.
- (a) D est le milieu de $[AC]$: $D(1, 3, 2)$, donc $\overrightarrow{D\Omega}(2, 1, 2) = \frac{1}{4}(8, 4, 8) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$.

(b) $\overrightarrow{D\Omega}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, vecteur normal au plan (ABC) ; comme $D \in (ABC)$ (milieu de $[AC]$), le point D est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC) et $d(\Omega, (ABC)) = D\Omega = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. (Vérification par la formule : $(ABC) : 2x + y + 2z - 9 = 0$ et $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|6+4+8-9|}{3} = 3$.)
- (a) $x^2 - 6x + y^2 - 8y + z^2 - 8z + 32 = 0 \iff (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 9 + 16 + 16 - 32 = 9$. (S) est la sphère de centre $\Omega(3, 4, 4)$ et de rayon $R = 3$.

(b) $d(\Omega, (ABC)) = 3 = R$: le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) . Le point de contact est le projeté orthogonal de Ω sur le plan, c'est-à-dire le point $D(1, 3, 2)$ d'après 2.b.
- Un plan parallèle à (ABC) a une équation de la forme $2x + y + 2z + c = 0$. Il coupe (S) suivant un cercle de rayon $r = \sqrt{5}$ si et seulement si $d(\Omega, (Q))^2 + r^2 = R^2$, soit $d(\Omega, (Q))^2 = 9 - 5 = 4$, donc $d(\Omega, (Q)) = 2$: $\frac{|6+4+8+c|}{3} = 2 \iff |18 + c| = 6 \iff c = -12$ ou $c = -24$. Donc $(Q_1) : 2x + y + 2z - 12 = 0$ et $(Q_2) : 2x + y + 2z - 24 = 0$.

Nombres complexes

Solution 2.

- $|a| = \sqrt{2+2} = 2$ et $a = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$.
- (a) $b - d = 1 + \sqrt{2} + i - 2i = 1 + \sqrt{2} - i = \bar{b} = c$.

(b) $b - a = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) = 1 + i(1 - \sqrt{2})$, donc $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = \sqrt{2} + 1 + i(\sqrt{2} + 1)(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1 + i(1 - 2) = 1 + \sqrt{2} - i = b - d$. Ainsi $\overrightarrow{DB} = (\sqrt{2} + 1)\overrightarrow{AB}$: les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les points A, B et D sont alignés.
- (a) $ac = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - i) = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) - i\sqrt{2} + i\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 2i = 2(1 + \sqrt{2} + i) = 2b$.

(b) $\arg(ac) \equiv \arg(a) + \arg(c)[2\pi]$, avec $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{4}$ et $\arg(c) = \arg(\bar{b}) \equiv -\arg(b)[2\pi]$. D'autre part $\arg(2b) \equiv \arg(b)[2\pi]$ car $2 > 0$. L'égalité $ac = 2b$ donne donc $\frac{\pi}{4} - \arg(b) \equiv \arg(b)[2\pi]$, soit $2 \arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

4. (a) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z$. Or $a = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{2}$ et $z' = \frac{1}{2}az$.
- (b) L'affixe de $R(C)$ est $\frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \times 2b = b$, donc $R(C) = B$. L'affixe de $R(A)$ est $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2} \times 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i = d$, donc $R(A) = D$.
- (c) $c - a = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - i(1 + \sqrt{2}) = 1 - i(1 + \sqrt{2})$. Alors $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1+i(1-\sqrt{2})}{1-i(1+\sqrt{2})} = \frac{(1+i(1-\sqrt{2}))(1+i(1+\sqrt{2}))}{1+(1+\sqrt{2})^2}$. Numérateur : $1 + i(1 + \sqrt{2}) + i(1 - \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 + 2i + 1 = 2 + 2i$; dénominateur : $1 + 3 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$. Donc $\frac{b-a}{c-a} = \frac{2(1+i)}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{(1+i)(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{(2-\sqrt{2})(1+i)}{2}$. Et $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\sqrt{2}(1+i) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$: on a bien $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$. Comme $\frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$, $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg(a) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Calcul des probabilités

Solution 3.

Le tirage dans U_1 est équiprobable parmi 6 boules ; après ajout de la boule tirée, U_2 contient 6 boules et le second tirage est équiprobable parmi ces 6 boules.

- (a) Trois boules de U_1 portent le nombre 1 : $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 (b) $ab = 2$ si et seulement si $(a = 1 \text{ et } b = 2)$ ou $(a = 2 \text{ et } b = 1)$.
 • Si $a = 1$ (probabilité $\frac{3}{6}$), U_2 contient 1; 1; 1; 1; 2; 2 et $p(b = 2) = \frac{2}{6}$;
 • si $a = 2$ (probabilité $\frac{1}{6}$), U_2 contient 1; 1; 1; 2; 2; 2 et $p(b = 1) = \frac{3}{6}$.
 Donc $p(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- $A \cap B$ est l'évènement « $a = 1$ et $b = 2$ », de probabilité $\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. Donc $p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- (a) $X = 0$ si et seulement si $a = 0$ (car $b \in \{1, 2\}$ n'est jamais nul) : $p(X = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
 (b) X prend les valeurs 0, 1, 2, 4. $p(X = 1) = p(a = 1 \text{ et } b = 1) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$; $p(X = 2) = p(B) = \frac{1}{4}$; $p(X = 4) = p(a = 2 \text{ et } b = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Loi de X : $p(X = 0) = \frac{1}{3}$, $p(X = 1) = \frac{1}{3}$, $p(X = 2) = \frac{1}{4}$, $p(X = 4) = \frac{1}{12}$ (vérification : $\frac{4}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = 1$).
 (c) $M = (X = 2) \cup (X = 4)$, donc $p(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; et $N = (X = 1)$, donc $p(N) = \frac{1}{3}$. Les évènements M et N sont équiprobables.

Problème d'analyse

Solution 4.

- (a) Pour $x > 0$: $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + 1 - 2\ln x + (\ln x)^2 = \frac{2x-2+x-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x} = \frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$.
 (b) Posons $t = \sqrt{x}$, soit $x = t^2$; quand $x \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow 0^+$, et $x(\ln x)^2 = t^2(2\ln t)^2 = 4(t\ln t)^2 \rightarrow 0$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} t\ln t = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$. De même, quand $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$ et $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(2\ln t)^2}{t^2} = 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \rightarrow 0$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.
 (c) D'après (a), $f(x) = \frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$. Quand $x \rightarrow 0^+$: $3x \rightarrow 0$, $x\ln x \rightarrow 0$ et $x(\ln x)^2 \rightarrow 0$, donc le numérateur tend vers $-2 < 0$, tandis que le dénominateur x tend vers 0^+ . Donc

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à (C_f) .
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\frac{f(x)}{x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}$, et chaque terme tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ (limites usuelles et question (b)) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
2. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2}{x^2} + 2(1 - \ln x) \times (-\frac{1}{x}) = \frac{2}{x^2} - \frac{2(1 - \ln x)}{x} = \frac{2 - 2x(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2}$.
3. (a) D'après le tableau, f' décroît vers 0 sur $]0, 1]$ et croît à partir de 0 sur $[1, \beta]$, puis décroît vers 0 sur $[\beta, +\infty[$: le minimum de f' sur $]0, +\infty[$ est $f'(1) = 0$, et $f'(x) > 0$ pour $x \neq 1$. La dérivée est positive et ne s'annule qu'en 1, donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Tableau de variations : f croît strictement de $-\infty$ (en 0^+) vers $+\infty$ (en $+\infty$), avec $f(1) = 2 - 2 + 1 = 1$ et une tangente horizontale au point $(1, 1)$.
- (b) f'' est la dérivée de f' : son signe se lit sur les variations de f' . $f''(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ (f' décroissante), $f''(x) \geq 0$ sur $[1, \beta]$ (f' croissante), $f''(x) \leq 0$ sur $[\beta, +\infty[$ (f' décroissante), avec $f''(1) = f''(\beta) = 0$.
- (c) (C_f) est concave sur $]0, 1]$, convexe sur $[1, \beta]$ et concave sur $[\beta, +\infty[$. f'' s'annule en changeant de signe en 1 et en β : les deux points d'inflexion ont pour abscisses 1 et $\beta \approx 4,9$.
4. (a) D'après la courbe (C_g) : $g(x) < 0$ sur $]0, \alpha[$, $g(x) > 0$ sur $]\alpha, 1[$, $g(x) < 0$ sur $]1, +\infty[$, et $g(\alpha) = g(1) = 0$.
- (b) $f(x) - x = g(x)$. Sur $[\alpha, 1]$, $g(x) \geq 0$, donc $f(x) \geq x$: la droite (Δ) est en dessous de (C_f) . Sur $]0, \alpha[$ et sur $]1, +\infty[$, $g(x) \leq 0$, donc $f(x) \leq x$: (Δ) est au-dessus de (C_f) . Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses α et 1.
5. Construction : asymptote verticale $x = 0$; (C_f) croissante, coupe $(\Delta) : y = x$ aux points $(\alpha, \alpha) \approx (0,3, 0,3)$ et $(1, 1)$; tangente horizontale et point d'inflexion en $(1, 1)$ (la courbe est concave avant, convexe après) ; second point d'inflexion en $(\beta, f(\beta)) \approx (4,9, 1,9)$; branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$ (la courbe monte de plus en plus lentement, en restant au-dessus de (Δ) pour $x > 1$).
6. (a) La fonction $F : x \rightarrow 2x - x \ln x$ est dérivable sur $[\alpha, 1]$ et $F'(x) = 2 - (\ln x + x \times \frac{1}{x}) = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$. Donc F est une primitive de $x \rightarrow 1 - \ln x$ sur $[\alpha, 1]$.
- (b) On écrit $(1 - \ln x)^2 = (1 - \ln x) \times (1 - \ln x)$ et on pose $u(x) = 1 - \ln x$, $v'(x) = 1 - \ln x$, d'où $u'(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = 2x - x \ln x$ (fonctions dérivables à dérivées continues sur $[\alpha, 1]$) : $\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = [(1 - \ln x)(2x - x \ln x)]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x}(2x - x \ln x) dx = 2 - (1 - \ln \alpha)(2\alpha - \alpha \ln \alpha) + \int_{\alpha}^1 (2 - \ln x) dx$. Or $\int_{\alpha}^1 (2 - \ln x) dx = [2x - (x \ln x - x)]_{\alpha}^1 = [3x - x \ln x]_{\alpha}^1 = 3 - 3\alpha + \alpha \ln \alpha$, et $(1 - \ln \alpha)(2\alpha - \alpha \ln \alpha) = \alpha(1 - \ln \alpha)(2 - \ln \alpha) = \alpha(2 - 3 \ln \alpha + (\ln \alpha)^2) = 2\alpha - 3\alpha \ln \alpha + \alpha(\ln \alpha)^2$. Donc $\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = 2 - 2\alpha + 3\alpha \ln \alpha - \alpha(\ln \alpha)^2 + 3 - 3\alpha + \alpha \ln \alpha = 5(1 - \alpha) + 4\alpha \ln \alpha - \alpha(\ln \alpha)^2 = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$.
- (c) Sur $[\alpha, 1]$, f est croissante et $f(\alpha) = \alpha > 0$ (car $g(\alpha) = 0$), donc $f(x) > 0$: l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$ (unité d'aire : 1 cm^2). Or $\int_{\alpha}^1 (2 - \frac{2}{x}) dx = [2x - 2 \ln x]_{\alpha}^1 = 2 - 2\alpha + 2 \ln \alpha$. Donc $\mathcal{A} = 2 - 2\alpha + 2 \ln \alpha + 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha = 7(1 - \alpha) + 2 \ln \alpha + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha \text{ cm}^2$ (soit environ $0,6 \text{ cm}^2$ pour $\alpha \approx 0,32$).
7. (a) **Initialisation** : $u_0 \in]\alpha, 1[$ par hypothèse. **Hérédité** : supposons $\alpha < u_n < 1$. Comme f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$: $f(\alpha) < f(u_n) < f(1)$. Or $f(\alpha) = \alpha$ (car $g(\alpha) = 0$) et $f(1) = 1$ (car $g(1) = 0$), donc $\alpha < u_{n+1} < 1$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < u_n < 1$.
- (b) Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Comme $u_n \in]\alpha, 1[$, la question 4.b (ou 4.a) donne $g(u_n) > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est strictement croissante.
- (c) (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite ℓ , avec $u_0 \leq \ell \leq$

1, donc $\ell \in]\alpha, 1]$. Comme f est continue sur $]0, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$, donc $\ell = \alpha$ ou $\ell = 1$. Puisque $\ell > \alpha$, on conclut : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.