

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2022 (épreuve officielle RS 22F)

Suites numériques

Solution 1.

- (a) Par récurrence. **Initialisation** : $u_0 = 2 > 1$. **Hérédité** : supposons $u_n > 1$. Alors $u_{n+1} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) > 0$, donc $u_{n+1} > 1$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

(b) $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}u_n - \frac{\sqrt{2}-2}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$. Comme $\sqrt{2} - 2 < 0$ et $u_n - 1 > 0$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante. Elle est de plus minorée par 1, donc elle est convergente (théorème de convergence monotone).
- (a) D'après le calcul de 1.a, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}v_n$ pour tout n : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 1$.

(b) $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, donc $u_n = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(c) $S = \sum_{k=0}^{2021} (1 + v_k) = 2022 + \sum_{k=0}^{2021} v_k = 2022 + v_0 \frac{1-q^{2022}}{1-q} = 2022 + \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$. Or $\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2} = 2 + \sqrt{2}$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1011}$. Donc $S = 2022 + (2 + \sqrt{2})\left(1 - \frac{1}{2^{1011}}\right)$.

Géométrie dans l'espace

Solution 2.

- (a) $\overrightarrow{\Omega A}(-2, -1, 2)$, donc $\Omega A = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. (On remarque que $\Omega A = R$: le point A appartient à la sphère (S) .)

(b) $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \vec{u} = (-2) \times 2 + (-1) \times (-2) + 2 \times 1 = -4 + 2 + 2 = 0$: les vecteurs directeurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\vec{u}$ des droites (ΩA) et (Δ) sont orthogonaux, donc ces deux droites (sécantes en A) sont perpendiculaires.

(c) La droite (Δ) passe par le point A de la sphère et est perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$: elle est tangente à la sphère (S) au point A . (Directement : pour $M = A + t\vec{u}$, $\Omega M^2 = \Omega A^2 + t^2 \|\vec{u}\|^2 = 9 + 9t^2 = 9 \iff t = 0$, seul point commun A .)
- $\overrightarrow{AM_a}(2a - 3 - 1, 3 - 2a + 1, a - 1 - 1) = (2a - 4, 4 - 2a, a - 2) = (a - 2)(2, -2, 1) = (a - 2)\vec{u}$. Donc $\overrightarrow{AM_a}$ est colinéaire à $\vec{u}$, vecteur directeur de (Δ) , et comme $A \in (\Delta)$, $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- (a) Un plan perpendiculaire à (Δ) admet $\vec{u}(2, -2, 1)$ pour vecteur normal, donc a une équation de la forme $2x - 2y + z + d = 0$. Il passe par M_a si et seulement si $2(2a - 3) -$

$2(3 - 2a) + (a - 1) + d = 0$, soit $9a - 13 + d = 0$, d'où $d = 13 - 9a$. Donc $(P_a) : 2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$.

(b) $d(\Omega, (P_a)) = \frac{|2 \times 3 - 2 \times 0 + (-1) - 9a + 13|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|18 - 9a|}{3} = |6 - 3a| = |3a - 6|$.

(c) (P_a) est tangent à (S) si et seulement si $d(\Omega, (P_a)) = R$, soit $|3a - 6| = 3$, c'est-à-dire $3a - 6 = 3$ ou $3a - 6 = -3$. Les deux valeurs cherchées sont $a = 3$ et $a = 1$.

Nombres complexes

Solution 3.

- $z_D = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1 + 5i + 5 - 3i}{2} = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i$.
- L'écriture complexe de h est $z' - z_A = \frac{1}{2}(z - z_A)$. Donc $z_E = z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_A) = 1 + 5i + \frac{1}{2}(-10i) = 1$.
- L'écriture complexe de R est $z' - z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_C) = -i(z - z_C)$. L'image de B a pour affixe $z_C - i(z_B - z_C) = 5 - 3i - i(-4 - 2i) = 5 - 3i + 4i + 2i^2 = 3 + i = z_D$. L'image de B par la rotation R est donc le point D .
- (a) $\frac{z_D - z_A}{z_E - z_A} = \frac{2 - 4i}{-2 - 4i} = \frac{(2 - 4i)(-2 + 4i)}{(-2)^2 + 4^2} = \frac{-4 + 8i + 8i + 16}{20} = \frac{12 + 16i}{20} = \frac{3 + 4i}{5}$, et $\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = \frac{-2 + i}{2 + i} = \frac{(-2 + i)(2 - i)}{(2)^2 + 1^2} = \frac{-4 + 2i + 2i + 1}{5} = \frac{-3 + 4i}{5}$. Le produit vaut $\frac{(3 + 4i)(-3 + 4i)}{25} = \frac{-9 + 12i - 12i - 16}{25} = \frac{-25}{25} = -1$.
 (b) Pour des points distincts, $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) \equiv \arg \frac{z_D - z_A}{z_F - z_A} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) \equiv \arg \frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} [2\pi]$. L'argument d'un produit est la somme des arguments, donc $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_A}{z_F - z_A} \times \frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} \right) \equiv \arg(-1) \equiv \pi [2\pi]$.
 (c) $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{2 - i}{2 + 4i} = \frac{(2 - i)(2 - 4i)}{4 + 16} = \frac{4 - 8i - 2i - 4}{20} = \frac{-10i}{20} = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}))$. Ainsi $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $\frac{FE}{FA} = \frac{1}{2}$: le triangle AEF est rectangle en F (et non isocèle, puisque $FE \neq FA$).
 (d) Le triangle AEF est rectangle en F , donc F appartient au cercle de diamètre $[AE]$. De même, $\frac{z_A - z_D}{z_E - z_D} = \frac{-2 + 4i}{-2 - i} = \frac{(-2 + 4i)(-2 + i)}{5} = \frac{4 - 2i - 8i - 4}{5} = \frac{-10i}{5} = -2i$ est un imaginaire pur : $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, donc le triangle ADE est rectangle en D et D appartient aussi au cercle de diamètre $[AE]$. Conclusion : les points A, D, E et F appartiennent au cercle de diamètre $[AE]$, de centre le point d'affixe $\frac{z_A + z_E}{2} = 1 + \frac{5}{2}i$ et de rayon $\frac{AE}{2} = \frac{5}{2}$. Ce résultat est cohérent avec (b) : dans le quadrilatère $AFED$, les angles en A et en E sont supplémentaires, ce qui caractérise un quadrilatère inscriptible.

Calcul des probabilités

Solution 4.

L'urne contient 12 boules et les tirages simultanés de trois boules sont équiprobables : $\text{card } \Omega = \binom{12}{3} = 220$.

- (a) $\text{card } A = \binom{4}{2} \times \binom{8}{1} = 6 \times 8 = 48$, donc $p(A) = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$. $\text{card } B = \binom{5}{1} \times \binom{7}{2} = 5 \times 21 = 105$, donc $p(B) = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$.
 (b) $A \cap B$: « deux boules rouges et une boule verte » : $\text{card}(A \cap B) = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 30$, donc $p(A \cap B) = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$. $p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{22}}{\frac{21}{44}} = \frac{3}{22} \times \frac{44}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$. Comme

- $p(A / B) = \frac{2}{7} \neq \frac{12}{55} = p(A)$ (ou encore $p(A)p(B) = \frac{12}{55} \times \frac{21}{44} \neq \frac{3}{22}$), les événements A et B ne sont pas indépendants.
2. (a) X prend les valeurs $0, 1, 2, 3$. Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$: $p(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{7}{3-k}}{220}$. $p(X = 0) = \frac{\binom{7}{3}}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$; $p(X = 1) = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$; $p(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \times 7}{220} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$; $p(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$. (Vérification : $35 + 105 + 70 + 10 = 220$.)
- (b) $p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{70}{220} + \frac{10}{220} = \frac{80}{220} = \frac{4}{11}$.

Problème d'analyse

Solution 5.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = x^3(\ln x - 1)^2$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- (a) Pour $x > 0$, $f(x) = x^4(\ln x)^2 - 2x^4 \ln x + x^4$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4(\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)^2 = 0$ (limites usuelles $x^n \ln x \rightarrow 0$). Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0.
 (b) Pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^3(\ln x - 1)^2 = x^3(\ln x)^2 - 2x^3 \ln x + x^3$, qui tend vers 0 quand $x \rightarrow 0^+$ (mêmes limites usuelles). Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$: la courbe (C) admet au point O une demi-tangente horizontale (portée par l'axe des abscisses).
- (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables : $f'(x) = 4x^3(\ln x - 1)^2 + x^4 \times 2(\ln x - 1) \times \frac{1}{x} = 2x^3(\ln x - 1)[2(\ln x - 1) + 1] = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$.
 (b) Sur $]0, +\infty[$, $2x^3 > 0$; $\ln x - 1 \geq 0 \iff x \geq e$ et $2\ln x - 1 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{e}$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]0, \sqrt{e}[$ (deux facteurs négatifs), $f'(x) < 0$ sur $]\sqrt{e}, e[$ et $f'(x) > 0$ sur $]e, +\infty[$. Tableau de variations : f est croissante sur $[0, \sqrt{e}]$ de $f(0) = 0$ à $f(\sqrt{e}) = e^2(\frac{1}{2} - 1)^2 = \frac{e^2}{4} \approx 1,8$, décroissante sur $[\sqrt{e}, e]$ jusqu'à $f(e) = 0$, puis croissante sur $[e, +\infty[$ vers $+\infty$.
- (a) $2x^2 > 0$; $\ln x \geq 0 \iff x \geq 1$ et $6\ln x - 5 \geq 0 \iff x \geq e^{\frac{5}{6}}$ (et $1 < e^{\frac{5}{6}}$). Donc : $f''(x) > 0$ sur $]0, 1[$ (deux facteurs négatifs), $f''(x) < 0$ sur $]1, e^{\frac{5}{6}}[$, $f''(x) > 0$ sur $]e^{\frac{5}{6}}, +\infty[$, et f'' s'annule en 1 et en $e^{\frac{5}{6}}$.
 (b) f'' s'annule en changeant de signe en $x = 1$ et en $x = e^{\frac{5}{6}}$: la courbe (C) admet exactement deux points d'inflexion, d'abscisses 1 et $e^{\frac{5}{6}}$ (d'ordonnées $f(1) = 1$ et $f(e^{\frac{5}{6}}) = \frac{e^{\frac{10}{3}}}{36} \approx 0,78$). (C) est convexe sur $]0, 1]$ et sur $[e^{\frac{5}{6}}, +\infty[$, concave sur $[1, e^{\frac{5}{6}}]$.
- (a) Construction : (C) part de O avec une demi-tangente horizontale, passe par le point d'inflexion $(1, 1)$, atteint son maximum local $(\sqrt{e}, \frac{e^2}{4}) \approx (1,6, 1,8)$, redescend jusqu'au point $(e, 0) \approx (2,7, 0)$ où elle touche l'axe des abscisses (tangente horizontale, $f'(e) = 0$), puis croît très rapidement (branche parabolique de direction (Oy)).
 (b) Pour $x > 0$: $x^2(\ln x - 1) = -1 \iff x^2(\ln x - 1) = -1$ avec $\ln x - 1 < 0$, et en élevant au carré, cela équivaut à $x^4(\ln x - 1)^2 = 1$ et $x < e$, c'est-à-dire $f(x) = 1$ et $x \in]0, e[$. Graphiquement, sur $]0, e[$ la droite d'équation $y = 1$ coupe (C) en deux points : en $x = 1$ (sur la partie croissante, $f(1) = 1$) et en un point d'abscisse comprise entre $\sqrt{e}$ et e (sur la partie décroissante, où f passe de $\frac{e^2}{4} > 1$ à 0). Le troisième point d'intersection de (C) avec $y = 1$, d'abscisse supérieure à e , ne convient pas car $\ln x - 1 > 0$ pour $x > e$. L'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$ admet donc exactement deux solutions ($x = 1$ et une solution dans $]\sqrt{e}, e[$, voisine de 2,2).

6. (a) g est définie sur $\mathbb{R}$ (car $|x| \in [0, +\infty[$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$: g est paire.
- (b) Pour $x \geq 0$, $g(x) = f(x)$: (C_g) coïncide avec (C) sur $[0, +\infty[$. Comme g est paire, (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on obtient (C_g) en complétant (C) par son symétrique par rapport à l'axe (Oy) .
7. (a) On pose $u(x) = \ln x - 1$ et $v'(x) = x^4$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^5}{5}$ (u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[1, e]$) : $I = \left[\frac{x^5}{5} (\ln x - 1) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^5}{5} \times \frac{1}{x} dx = (0 - \frac{1}{5}(0 - 1)) - \frac{1}{5} \int_1^e x^4 dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^e = \frac{1}{5} - \frac{e^5 - 1}{25} = \frac{6 - e^5}{25}$.
- (b) h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = 5x^4(\ln x - 1)^2 + x^5 \times 2(\ln x - 1) \times \frac{1}{x} = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.
- (c) D'après (b), $f(x) = \frac{1}{5}(h'(x) - 2x^4(\ln x - 1))$ sur $]0, +\infty[$, donc $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{5}[h(x)]_1^e - \frac{2}{5} \int_1^e x^4(\ln x - 1) dx = \frac{1}{5}(h(e) - h(1)) - \frac{2}{5}I = \frac{1}{5}(0 - 1) - \frac{2}{5}I = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$.
- (d) $f(x) \geq 0$ sur $[1, e]$, donc l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx$ unités d'aire, avec une unité d'aire égale à 1cm^2 : $\mathcal{A} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{6 - e^5}{25} = \frac{-25 - 12 + 2e^5}{125} = \frac{2e^5 - 37}{125} \text{cm}^2 \approx 2,08 \text{cm}^2$.