

Examen national : Mathématiques

Session normale 2022 (épreuve officielle NS 22F)

Durée : 3 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux. Le candidat peut traiter les exercices suivant l'ordre qui lui convient ; l'utilisation de la couleur rouge est à éviter. Barème : 3 + 3 + 3 + 2,5 + 8,5 points. On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module ; $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Géométrie de l'espace

Exercice 1 (3 points). Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 1, 1)$, $B(1, 2, 0)$ et $C(-1, 1, 2)$.

- (a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$. (0,5 pt)
(b) En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) . (0,25 pt)
- Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1, 1, 2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$. Déterminer une équation de la sphère (S) . (0,5 pt)
- Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A . (0,5 pt)
- On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC) .
(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) . (0,25 pt)
(b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées. (0,5 pt)
(c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k})$, puis en déduire la distance $d(A, (\Delta))$. (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 2 (3 points). Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

- Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$. (0,5 pt)
- On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$. (0,5 pt)
- (a) Écrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique. (0,5 pt)
(b) En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$. (0,5 pt)
- Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ') .
(a) Vérifier que $|z + 2| = 2$. (0,25 pt)

- (b) Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$). (0,5 pt)
 (c) En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera. (0,25 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (3 points). Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

- Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$; où A est l'évènement « N'obtenir aucune boule rouge ». (0,75 pt)
- Calculer $p(B)$; où B est l'évènement « Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes ». (0,75 pt)
- Montrer que $p(C) = \frac{1}{2}$; où C est l'évènement « Obtenir exactement une boule rouge ». (0,75 pt)
- Calculer $p(D)$; où D est l'évènement « Obtenir au moins deux boules rouges ». (0,75 pt)

Équations différentielles et calcul intégral

Exercice 4 (2.5 points). On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^x$.

- (a) Vérifier que $x \rightarrow xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I = \int_{-1}^0 h(x) dx$. (0,75 pt)
 (b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^x dx$. (0,75 pt)
- (a) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 0$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$. (0,5 pt)

Problème d'analyse

Exercice 5 (8.5 points). On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 pt)
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat. (0,5 pt)
- (a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. (0,5 pt)
 (b) Étudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) . (0,75 pt)
- (a) Montrer que $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
 (b) Vérifier que $x(e^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
 (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
- (a) Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où $g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
 (b) À partir de la courbe ci-contre de la fonction g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque :

$g(\alpha) = 0$). (0,5 pt)

[Figure : courbe (C_g) de la fonction g dans un repère orthonormé ; elle coupe l'axe des abscisses en deux points seulement, d'abscisses $\alpha \approx -4,5$ et 0 ; elle est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x < \alpha$ et pour $x > 0$, au-dessous entre α et 0 , avec un minimum voisin de -2 atteint vers $x \approx -1,7$; elle croît très vite pour $x > 0$.]

(c) Étudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexion.

(0,5 pt)

6. Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (On prend : $\ln(4) \approx 1,4$, $\alpha \approx -4,5$ et $f(\alpha) \approx -3,5$). (1 pt)

7. (a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

(b) Calculer $(f^{-1})'(\ln 4)$. (0,25 pt)

8. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(a) Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$. (0,5 pt)

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (0,5 pt)

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. (0,25 pt)

(d) Calculer la limite de la suite (u_n) . (0,5 pt)