

Examen national : Corrigé

Session normale 2022 (épreuve officielle NS 22F)

Géométrie de l'espace

Solution 1.

- (a) $\overrightarrow{AB}(1, 1, -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 0, 1)$. Par la formule du produit vectoriel : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1 \times 1 - (-1) \times 0)\vec{i} - (1 \times 1 - (-1) \times (-1))\vec{j} + (1 \times 0 - 1 \times (-1))\vec{k} = \vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}$. Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$.
(b) Le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + \vec{k}$, de coordonnées $(1, 0, 1)$, est non nul et orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: c'est un vecteur normal au plan (ABC) , qui admet donc une équation de la forme $x + z + d = 0$. Comme $A(0, 1, 1) \in (ABC) : 0 + 1 + d = 0$, soit $d = -1$. Donc $(ABC) : x + z - 1 = 0$.
- $M(x, y, z) \in (S) \iff \Omega M = \sqrt{2} \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$. En développant : $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$.
- $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$: le plan (ABC) est donc tangent à la sphère (S) .
Le point de contact est le projeté orthogonal de Ω sur le plan. Or $A \in (ABC)$ (d'après 1.b) et $\overrightarrow{\Omega A}(-1, 0, -1) = -\vec{n}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$: A est bien le projeté orthogonal de Ω sur (ABC) . Donc (ABC) est tangent à (S) au point A .
- (a) (Δ) passe par $C(-1, 1, 2)$ et est dirigée par $\vec{n}(1, 0, 1)$: $(\Delta) : x = -1 + t, \quad y = 1, \quad z = 2 + t \quad (t \in \mathbb{R})$.
(b) Un point $M(-1 + t, 1, 2 + t)$ de (Δ) appartient à (S) si et seulement si $(-2 + t)^2 + 0 + t^2 = 2$, soit $2t^2 - 4t + 2 = 0$, c'est-à-dire $(t-1)^2 = 0$. Cette équation a une solution unique $t = 1$: la droite (Δ) coupe la sphère en un seul point, donc elle est tangente à (S) au point D obtenu pour $t = 1$: $D(0, 1, 3)$.
(c) $\overrightarrow{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k}) = (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 0$. Ainsi $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal au vecteur directeur de (Δ) ; comme $C \in (\Delta)$, le point C est le projeté orthogonal de A sur (Δ) , donc $d(A, (\Delta)) = AC = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Nombres complexes

Solution 2.

- t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ d'affixe a ; l'affixe de $D = t(B)$ est $d = b + a = (-1 + i\sqrt{3}) + (-1 - i\sqrt{3}) = -2$.
- L'écriture complexe de R est $z' - d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - d)$, avec $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $c = d + e^{i\frac{2\pi}{3}}(b - d) = -2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i\sqrt{3}) = -2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right) = -2 - 2 = -4$.
- (a) $\frac{b-c}{a-c} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$. Or $3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Donc $\frac{b-c}{a-c} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (module 1, argument $\frac{\pi}{3}$).

- (b) D'après (a), $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. D'autre part $\frac{c-d}{b-d} = \frac{-4+2}{-1+i\sqrt{3}+2} = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-2(1-i\sqrt{3})}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donc $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$. (On peut aussi remarquer que $\frac{c-d}{b-d} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est exactement le rapport de la rotation R qui envoie B sur C .)
4. (a) $M \in (\Gamma) \iff DM = 2 \iff |z-d| = 2 \iff |z+2| = 2$.
- (b) $M \in (\Gamma')$ donne $|z| = 4$, d'où $z\bar{z} = |z|^2 = 16$. D'autre part $|z+2|^2 = 4$ s'écrit $(z+2)(\bar{z}+2) = 4$, soit $z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4 = 4$, donc $16 + 2(z+\bar{z}) = 0$, c'est-à-dire $z + \bar{z} = -8$.
- (c) Posons $z = x + iy$ (x, y réels). $z + \bar{z} = 2x = -8$ donne $x = -4$; puis $|z| = 4$ donne $16 + y^2 = 16$, donc $y = 0$. Ainsi tout point commun aux deux cercles a pour affixe $z = -4$. Réciproquement, $|-4+2| = 2$ et $|-4| = 4$: le point d'affixe -4 appartient bien aux deux cercles. Les cercles (Γ) et (Γ') se coupent donc en un point unique, le point C d'affixe -4 (les cercles sont tangents intérieurement en C).

Calcul des probabilités

Solution 3.

Les tirages simultanés de trois boules parmi dix sont équiprobables : $\text{card } \Omega = \binom{10}{3} = 120$.

1. A est réalisé lorsque les trois boules sont prises parmi les six boules non rouges : $\text{card } A = \binom{6}{3} = 20$, donc $p(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.
2. $\text{card } B = \binom{3}{3} + \binom{3}{3} = 2$ (les deux cas sont incompatibles), donc $p(B) = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$.
3. Une boule rouge parmi quatre et deux boules non rouges parmi six : $\text{card } C = \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} = 4 \times 15 = 60$, donc $p(C) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.
4. D est réalisé lorsqu'on obtient deux ou trois boules rouges : $\text{card } D = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 36 + 4 = 40$, donc $p(D) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$. (Vérification : D est l'évènement contraire de $A \cup C$, avec A et C incompatibles, donc $p(D) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.)

Équations différentielles et calcul intégral

Solution 4.

1. (a) La fonction $H : x \rightarrow xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H'(x) = 1 \times e^x + xe^x = (x+1)e^x = h(x)$: H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$. Donc $I = [xe^x]_{-1}^0 = 0 - (-1)e^{-1} = \frac{1}{e}$.
- (b) On pose $u(x) = (x+1)^2$ et $v(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 2(x+1)$ et $v(x) = e^x$; u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[-1, 0]$. Alors $J = [(x+1)^2 e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2(x+1)e^x dx = (1-0) - 2I = 1 - \frac{2}{e}$.
2. (a) L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ s'écrit $(r-1)^2 = 0$: elle a une racine double $r = 1$. Les solutions de (E) sont les fonctions $y(x) = (\alpha x + \beta)e^x$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (b) Soit $y(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ une solution de (E) . $y(0) = \beta$, et $y'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$ donne $y'(0) = \alpha + \beta$. Les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ imposent $\beta = 1$ et $\alpha = 1$: la solution cherchée est $y(x) = (x+1)e^x = h(x)$. Donc h est la solution de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$.

Problème d'analyse

Solution 5.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = 1$ et, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- Pour $x \neq 0$, $\frac{f(x)}{x} = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- (a) Pour tout réel x : $f(x) - x = x \left[(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 - 1 \right] = x(e^{\frac{x}{2}} - 2)e^{\frac{x}{2}} = xe^x - 2xe^{\frac{x}{2}}$.
Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2te^t = 0$ (en posant $t = \frac{x}{2}$). Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$: la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
(b) $f(x) - x = xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 2)$, et $e^{\frac{x}{2}} > 0$. De plus $e^{\frac{x}{2}} - 2 \geq 0 \iff \frac{x}{2} \geq \ln 2 \iff x \geq \ln 4$.
• Si $x < 0$: $x < 0$ et $e^{\frac{x}{2}} - 2 < 0$, donc $f(x) - x > 0$.
• Si $0 < x < \ln 4$: $x > 0$ et $e^{\frac{x}{2}} - 2 < 0$, donc $f(x) - x < 0$.
• Si $x > \ln 4$: $f(x) - x > 0$; enfin $f(x) - x = 0$ pour $x = 0$ et $x = \ln 4$.

Donc (C) est au-dessus de (Δ) sur $] -\infty, 0[$ et sur $] \ln 4, +\infty[$, au-dessous de (Δ) sur $]0, \ln 4[$, et (C) coupe (Δ) aux points $O(0, 0)$ et $(\ln 4, \ln 4)$.

- (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Avec $(x)' = 1$ et $\left((e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 \right)' = 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} - 1) = e^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} - 1)$: $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + xe^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} - 1)$.
(b) $e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0 \iff x \geq 0$: les réels x et $e^{\frac{x}{2}} - 1$ sont toujours de même signe (et nuls simultanément en 0), donc $x(e^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + e^{\frac{x}{2}} \times x(e^{\frac{x}{2}} - 1)$ est la somme de deux termes positifs : $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, avec égalité seulement en $x = 0$.
(c) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée est positive et ne s'annule qu'en 0) : f croît de $-\infty$ (en $-\infty$) à $+\infty$ (en $+\infty$), avec $f(0) = 0$ et une tangente horizontale en O .
- (a) $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + x(e^x - e^{\frac{x}{2}})$. On dérive : $\left((e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 \right)' = e^{\frac{x}{2}} (e^{\frac{x}{2}} - 1) = e^x - e^{\frac{x}{2}}$ et $\left(x(e^x - e^{\frac{x}{2}}) \right)' = e^x - e^{\frac{x}{2}} + x(e^x - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}})$. Donc $f''(x) = 2e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + xe^x - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(4e^{\frac{x}{2}} - 4 + 2xe^{\frac{x}{2}} - x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}[(2x + 4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4] = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$.
(b) D'après la courbe (C_g) , g s'annule en $\alpha \approx -4,5$ et en 0 (on vérifie : $g(0) = 4 - 4 = 0$), et : $g(x) > 0$ sur $] -\infty, \alpha[\cup]0, +\infty[$, $g(x) < 0$ sur $] \alpha, 0[$.
(c) Comme $e^{\frac{x}{2}} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $g(x)$: (C) est convexe sur $] -\infty, \alpha[$ et sur $]0, +\infty[$, concave sur $] \alpha, 0[$. f'' s'annule en changeant de signe en α et en 0 : les deux points d'inflexion ont pour abscisses $\alpha \approx -4,5$ et 0.
- Construction : (C) passe par O (tangente horizontale, point d'inflexion) et par le point $(\ln 4, \ln 4) \approx (1,4, 1,4)$ où elle recoupe (Δ) ; elle admet $(\Delta) : y = x$ pour asymptote en $-\infty$ (elle est au-dessus de (Δ) pour $x < 0$), le point d'inflexion $(\alpha, f(\alpha)) \approx (-4,5, -3,5)$, elle est au-dessous de (Δ) sur $]0, \ln 4[$ puis au-dessus, et elle présente une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$. La fonction est croissante sur tout $\mathbb{R}$.
- (a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =] \lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
(b) $f(\ln 4) = \ln 4(e^{\ln 2} - 1)^2 = \ln 4$, donc $f^{-1}(\ln 4) = \ln 4$. Par ailleurs $f'(\ln 4) = (2 - 1)^2 + \ln 4 \times 2 \times (2 - 1) = 1 + 2 \ln 4 \neq 0$. Comme f est dérivable en $\ln 4$ et $f'(\ln 4) \neq 0$: $(f^{-1})'(\ln 4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln 4))} = \frac{1}{f'(\ln 4)} = \frac{1}{1 + 2 \ln 4} = \frac{1}{1 + 4 \ln 2}$.
- (a) **Initialisation** : $u_0 = 1$ et $0 < 1 < \ln 4 \approx 1,39$. **Hérédité** : supposons $0 < u_n < \ln 4$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $f(0) < f(u_n) < f(\ln 4)$, soit $0 < u_{n+1} < \ln 4$ (car

$f(0) = 0$ et $f(\ln 4) = \ln 4$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \ln 4$.

(b) Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or $u_n \in]0, \ln 4[$ et, d'après 3.b, $f(x) - x < 0$ sur $]0, \ln 4[$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

(c) (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente (théorème de convergence monotone).

(d) Soit $\ell = \lim u_n$; d'après (a), $0 \leq \ell \leq \ln 4$ et même $\ell \leq u_0 = 1 < \ln 4$ car la suite est décroissante. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\ell(e^{\frac{\ell}{2}} - 1)^2 = \ell$, soit $\ell = 0$ ou $(e^{\frac{\ell}{2}} - 1)^2 = 1$. Cette dernière égalité donne $e^{\frac{\ell}{2}} = 2$ (car $e^{\frac{\ell}{2}} = 0$ est impossible), soit $\ell = \ln 4$, exclu. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.