

Examen national — Corrigé (sujet d'entraînement)

Session normale 2025

Suites numériques

Solution 1.

- $u_1 = \frac{6}{5} = 1,2$ et $u_2 = \frac{3 \times 1,2}{1+2,4} = 3, \frac{6}{3}, 4 = \frac{18}{17} \approx 1,06$.
- Initialisation** : $u_0 = 2 > 1$. **Hérédité** : supposons $u_n > 1$. Alors $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{1+2u_n} = \frac{u_n - 1}{1+2u_n} > 0$ car $u_n - 1 > 0$ et $1 + 2u_n > 0$. Donc $u_{n+1} > 1$. **Conclusion** : $u_n > 1$ pour tout n .
- $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$. Comme $u_n > 1$, $1 - u_n < 0$ tandis que $2u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$: la différence est strictement négative. La suite est strictement décroissante.
- Décroissante et minorée par 1, (u_n) converge (théorème de la convergence monotone).
- $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \left(\frac{u_n-1}{1+2u_n}\right) \times \left(\frac{1+2u_n}{3u_n}\right) = \frac{u_n-1}{3u_n} = \frac{1}{3}v_n$. (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $v_0 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.
- $v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. De $v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$ on tire $u_n = \frac{1}{1-v_n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$, $\lim u_n = 1$.

Nombres complexes

Solution 2.

- $\Delta = 12 - 16 = -4 = (2i)^2$, donc $z = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2}$: $S = \{\sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i\}$.
- $|a| = \sqrt{3+1} = 2$ et $a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$: $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, d'argument $\frac{\pi}{6}$.
- $a^6 = 2^6 e^{i\pi} = -64$, réel. $a^{12} = (a^6)^2 = 4096$.
- $d = e^{i\frac{\pi}{3}}a = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$. Une rotation conserve les distances : $OD = OA = 2$, et l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$. Un triangle isocèle en O dont l'angle au sommet vaut $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral : OAD est équilatéral (on vérifie $AD = |2i - \sqrt{3} - i| = |-\sqrt{3} + i| = 2$).
- $|z - a| = AM$ et $|z - \bar{a}| = BM$ où B est le point d'axe $\bar{a} = \sqrt{3} - i$, symétrique de A par rapport à l'axe des réels. L'ensemble cherché est la médiatrice de $[AB]$, c'est-à-dire l'axe des réels (droite $(O, \vec{u})$).

Probabilités

Solution 3.

1. Il y a $\binom{5}{2} = 10$ tirages équiprobables. $P(R) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$ et $P(V) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$.
2. X prend les valeurs $0, 1, 2$: $P(X=0) = P(V) = \frac{1}{10}$, $P(X=2) = P(R) = \frac{3}{10}$, $P(X=1) = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10}$. $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = 1,2$.
3. (a) On répète 4 fois, de façon indépendante (remise), une expérience dont le succès « deux boules rouges » a la probabilité $p = \frac{3}{10}$: Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,3$. (b) $P(Y=2) = \binom{4}{2}(0,3)^2(0,7)^2 = 6 \times 0,09 \times 0,49 = 0,2646$. $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - (0,7)^4 = 1 - 0,2401 = 0,7599$.

Problème d'analyse

Solution 4.

Partie A.

1. $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$, du signe de $2x^2 - 1$ sur $]0, +\infty[$: g est décroissante sur $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et croissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$.
2. Le minimum de g vaut $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 > 0$. Donc $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Partie B.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: la droite $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées) et $x - 1 \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. $f(x) - (x - 1) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: (Δ) est asymptote oblique. Le signe de $f(x) - (x - 1) = \frac{\ln x}{x}$ est celui de $\ln x$: $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (Δ) sur $]0, 1[$, au-dessus sur $]1, +\infty[$, et les deux se coupent au point d'abscisse 1.
4. $f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$. D'après la partie A, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, de $-\infty$ à $+\infty$.
5. f est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$: l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. Comme $f(1) = 0$, cette solution est $x = 1$.
6. $f(1) = 0$ et $f'(1) = g(1) = 2$: $(T) : y = 2(x - 1)$.
7. Tracé : asymptote verticale $x = 0$, asymptote oblique $y = x - 1$, passage par $(1, 0)$ avec tangente de pente 2, courbe croissante, au-dessus de (Δ) pour $x > 1$.

Partie C.

1. $H'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$: H est une primitive de $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$.
2. $I = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$.
3. Sur $[1, e]$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) , donc l'aire vaut $\int_1^e (f(x) - (x - 1)) dx = I = \frac{1}{2}$ unité d'aire. L'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$: l'aire est 2 cm^2 .
4. $J = \int_1^e (x - 1) dx + I = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^e + \frac{1}{2} = \left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - e + 1$.