

Examen national : Mathématiques (sujet d'entraînement)

Session normale 2025

Durée : 3 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 3 + 3 + 3 + 11 points.

Suites numériques

Exercice 1 (3 points). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$.
3. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) est convergente.
5. On pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et préciser v_0 .
6. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , et calculer $\lim u_n$.

Nombres complexes

Exercice 2 (3 points). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
2. On pose $a = \sqrt{3} + i$. Écrire a sous forme trigonométrique.
3. Montrer que a^6 est un réel et calculer a^{12} .
4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et A le point d'affixe a . Déterminer l'affixe d du point $D = R(A)$ et en déduire la nature du triangle OAD .
5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - a| = |z - \bar{a}|$.

Probabilités

Exercice 3 (3 points). Une urne contient trois boules rouges et deux boules vertes, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements R : « les deux boules sont rouges » et V : « les deux boules sont vertes ».

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance $E(X)$.
3. On répète quatre fois de suite l'expérience précédente en remettant les deux boules dans l'urne après chaque tirage. Soit Y le nombre de fois où l'on obtient deux boules rouges.
 - (a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Calculer $P(Y = 2)$ puis $P(Y \geq 1)$ (arrondir à 10^{-4}).

Problème d'analyse

Exercice 4 (11 points). Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g (les limites ne sont pas demandées).
2. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$, puis étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ) .
4. Montrer que pour tout $x > 0 : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, et dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$ et la déterminer.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
7. Tracer (Δ) , (T) et $(\mathcal{C})$.

Partie C.

1. Montrer que la fonction $H : x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.
3. En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
4. Calculer $J = \int_1^e f(x) dx$.