

Devoir surveillé n°4 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 2

Durée : 1 heure. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 6 + 8 points.

Statistiques

Exercice 1 (6 points). Le tableau suivant donne les notes (sur 20) obtenues par les 20 élèves d'une classe à un contrôle de mathématiques :

Note x_i	8	10	12	14	16
Effectif n_i	2	6	4	4	4

- Calculer la fréquence f_i de chaque note (on donnera les résultats sous forme décimale). (1 pt)
- Déterminer le mode et la médiane de cette série. (1,5 pt)
- Calculer la moyenne $\bar{x}$ de la série. (1 pt)
- Calculer la variance V puis l'écart-type σ de la série. (1,5 pt)
- (a) Quel pourcentage des élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 12 ? (0,5 pt)
(b) Combien d'élèves ont une note appartenant à l'intervalle $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$? (0,5 pt)

Géométrie dans l'espace

Exercice 2 (6 points). Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 6 : $ABCD$ est la face inférieure, $EFGH$ la face supérieure, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont les arêtes verticales.

- Montrer que la droite (AE) est orthogonale au plan (ABC) . (1 pt)
- (a) En déduire que les droites (AE) et (BD) sont orthogonales. (0,5 pt)
(b) Justifier que les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires. (0,5 pt)
(c) En déduire que la droite (BD) est orthogonale au plan (ACE) , puis que les droites (BD) et (EC) sont orthogonales. (0,5 pt)
- (a) Montrer que les droites (EG) et (AC) sont parallèles. (0,5 pt)
(b) Montrer que les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles. (0,5 pt)
- On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 6\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 6\vec{k}$. Soit I le milieu de $[EF]$.
(a) Donner les coordonnées des points G et I . (0,5 pt)
(b) Calculer les distances AG et IG . (1 pt)
- Donner une représentation paramétrique de la droite (AG) . Le point $M(4; 4; 4)$ appartient-il à la droite (AG) ? (1 pt)

Fonctions numériques

Exercice 3 (8 points). Partie A. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f , puis calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$. (0,5 pt)
2. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = (x - 2)^2 - 1$. (0,5 pt)
3. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$; préciser sa valeur et le réel en lequel il est atteint. (1 pt)
4. (a) Soient x_1 et x_2 deux réels. Montrer que $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$. (0,5 pt)
(b) En déduire que f est strictement décroissante sur $] -\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
5. Soit g la fonction définie par $g(x) = (x - 2)^2$ et (P) la parabole d'équation $y = x^2$. Par quelle transformation la courbe (C_g) se déduit-elle de (P) ? Par quelle transformation (C_f) se déduit-elle de (C_g) ? (1 pt)

Partie B. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_h de h , puis étudier la parité de h . Que peut-on en déduire pour la courbe (C_h) ? (1 pt)
2. (a) Montrer que pour tout réel x : $x^2 + 1 \geq 2|x|$. (0,5 pt)
(b) En déduire que pour tout réel x : $|h(x)| \leq \frac{1}{2}$. (1 pt)
3. Calculer $h(1)$ et $h(-1)$. En déduire que h admet sur $\mathbb{R}$ un maximum et un minimum, que l'on précisera. (1 pt)