

Devoir surveillé n°4 : Corrigé

Semestre 2, devoir 2

Statistiques

Solution 1.

1. L'effectif total est $N = 2 + 6 + 4 + 4 + 4 = 20$ et $f_i = \frac{n_i}{N}$:

Note x_i	8	10	12	14	16
Effectif n_i	2	6	4	4	4
Fréquence f_i	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2

(On vérifie que la somme des fréquences vaut 1.)

2. **Mode** : la note d'effectif maximal (6) est 10, donc le mode est 10.

Médiane : les effectifs cumulés croissants sont 2, 8, 12, 16, 20. Comme $N = 20$ est pair, la médiane est la moyenne des valeurs de rang 10 et 11 dans la série rangée par ordre croissant. Les valeurs de rang 9 à 12 sont toutes égales à 12, donc $Me = \frac{12+12}{2} = 12$.

3. $\bar{x} = \frac{2 \times 8 + 6 \times 10 + 4 \times 12 + 4 \times 14 + 4 \times 16}{20} = \frac{16 + 60 + 48 + 56 + 64}{20} = \frac{244}{20} = 12,2$.

4. Formule de König-Huygens : $V = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$. $\sum n_i x_i^2 = 2 \times 64 + 6 \times 100 + 4 \times 144 + 4 \times 196 + 4 \times 256 = 128 + 600 + 576 + 784 + 1024 = 3112$. Donc $V = \frac{3112}{20} - (12,2)^2 = 155,6 - 148,84 = 6,76$ et $\sigma = \sqrt{6,76} = 2,6$.

5. (a) Les élèves ayant au moins 12 sont au nombre de $4 + 4 + 4 = 12$, soit $\frac{12}{20} = 0,6$: 60 % des élèves.

(b) $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma] = [9,6; 14,8]$. Les notes de cet intervalle sont 10, 12 et 14, soit $6 + 4 + 4 = 14$ élèves (c'est-à-dire 70 % de la classe).

Géométrie dans l'espace

Solution 2.

1. Les faces $ABFE$ et $ADHE$ du cube sont des carrés, donc (AE) est perpendiculaire à (AB) et à (AD) . Les droites (AB) et (AD) sont deux droites sécantes (en A) du plan (ABC) . Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à ce plan : (AE) est orthogonale au plan (ABC) .
2. (a) Les points B et D appartiennent au plan (ABC) (c'est le plan de la face $ABCD$), donc (BD) est une droite de ce plan. Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toute droite de ce plan, donc (AE) est orthogonale à (BD) .
- (b) $ABCD$ est un carré ; les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, donc (BD) est perpendiculaire à (AC) .

- (c) La droite (BD) est orthogonale aux droites (AE) et (AC) , qui sont sécantes en A et contenues dans le plan (ACE) : d'après le critère pratique, (BD) est orthogonale au plan (ACE) . La droite (EC) est contenue dans ce plan (car E et C y appartiennent), donc (BD) est orthogonale à (EC) .
3. (a) Les arêtes $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur, donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ et $AEGC$ est un parallélogramme (en fait un rectangle). Ses côtés opposés $[EG]$ et $[AC]$ sont donc parallèles : (EG) est parallèle à (AC) .
- (b) Les faces $ABFE$ et $ADHE$ sont des carrés, donc (EF) est parallèle à (AB) et (EH) est parallèle à (AD) . Ainsi (EF) et (EH) sont parallèles à des droites du plan (ABC) , donc parallèles à ce plan. Ce sont deux droites sécantes (en E) du plan (EFG) : les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.
4. (a) Dans ce repère, $B(6; 0; 0)$, $D(0; 6; 0)$, $E(0; 0; 6)$, d'où $G(6; 6; 6)$ et $F(6; 0; 6)$. Le milieu de $[EF]$ est $I(3; 0; 6)$.
- (b) $AG = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$.
 $IG = \sqrt{(6-3)^2 + (6-0)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{9 + 36 + 0} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
5. La droite (AG) passe par $A(0; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(6; 6; 6)$, ou plus simplement $\vec{v}(1; 1; 1)$ (colinéaire à $\overrightarrow{AG}$). Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour $t = 4$ on obtient le point $(4; 4; 4)$, donc $M \in (AG)$.

Fonctions numériques

Solution 3.

Partie A.

- f est un polynôme, donc $D_f = \mathbb{R}$. $f(0) = 3$, $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$ et $f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$.
- $(x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3 = f(x)$.
- Pour tout réel x , $(x-2)^2 \geq 0$, donc $f(x) = (x-2)^2 - 1 \geq -1$. De plus $f(2) = 0 - 1 = -1$. Donc f admet sur $\mathbb{R}$ le minimum -1 , atteint en $x = 2$.
- (a) $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$.
 (b) Soient $x_1 < x_2$ dans $] -\infty, 2]$. Alors $x_1 - x_2 < 0$ et, comme $x_1 < 2$ et $x_2 \leq 2$, $x_1 + x_2 < 4$, donc $x_1 + x_2 - 4 < 0$. Le produit de deux nombres strictement négatifs est strictement positif : $f(x_1) - f(x_2) > 0$, soit $f(x_1) > f(x_2)$. Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty, 2]$.
 Soient $x_1 < x_2$ dans $[2, +\infty[$. Alors $x_1 - x_2 < 0$ et $x_1 + x_2 > 4$ (car $x_1 \geq 2$ et $x_2 > 2$), donc $x_1 + x_2 - 4 > 0$; le produit est strictement négatif : $f(x_1) < f(x_2)$. Donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

5. En posant $k(x) = x^2$, on a $g(x) = k(x - 2)$: la courbe (C_g) se déduit de la parabole (P) par la translation de vecteur $2\vec{i}$. Ensuite $f(x) = g(x) - 1$: la courbe (C_f) se déduit de (C_g) par la translation de vecteur $-\vec{j}$.

Partie B.

1. Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, donc $D_h = \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x : $h(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -h(x)$. Donc h est impaire, et sa courbe (C_h) est symétrique par rapport à l'origine O du repère.
2. (a) Comme $|x|^2 = x^2$, on a $x^2 + 1 - 2|x| = |x|^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 2|x|$ pour tout réel x .
(b) Comme $x^2 + 1 > 0$, $|h(x)| = |x| \frac{1}{x^2 + 1}$. D'après (a), $|x| \leq \frac{x^2 + 1}{2}$; en divisant par $x^2 + 1 > 0$: $|x| \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $|h(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. $h(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $h(-1) = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$. La question précédente donne $-\frac{1}{2} \leq h(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout réel x , et ces deux bornes sont atteintes : h admet sur $\mathbb{R}$ le maximum $\frac{1}{2}$, atteint en $x = 1$, et le minimum $-\frac{1}{2}$, atteint en $x = -1$.