

Devoir surveillé n°3 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 1

Durée : 1 heure. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 6 + 8 points.

Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 1 (6 points).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
 - (a) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$; (1 pt)
 - (b) $\sin x = -\frac{1}{2}$; (1 pt)
 - (c) $\tan x = 1$. (1 pt)
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (on pourra poser $X = \cos x$). (1,5 pt)
3. Résoudre dans $] -\pi, \pi]$ l'inéquation $2 \sin x - 1 \geq 0$ (on représentera l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique). (1,5 pt)

Transformations du plan

Exercice 2 (6 points). Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le point $A(2; 1)$, le vecteur $\vec{u}(3; -2)$ et les points $\Omega(1; -1)$ et $\Omega'(4; 1)$.

1. Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$. Déterminer les coordonnées du point $A_1 = t(A)$, puis celles du point B tel que $t(B) = O$. (1 pt)
2. Soit s la symétrie centrale de centre Ω . Donner l'expression analytique de s et calculer les coordonnées de $A_2 = s(A)$. (1 pt)
3. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2 .
 - (a) Donner l'expression analytique de h . (1 pt)
 - (b) Calculer les coordonnées de $A_3 = h(A)$ et vérifier que $\overrightarrow{\Omega A_3} = -2\overrightarrow{\Omega A}$. (0,5 pt)
4. Soit (D) la droite d'équation $y = 2x + 3$. Déterminer une équation de la droite $(D') = h((D))$, image de (D) par h . (1 pt)
5. Soit s' la symétrie centrale de centre Ω' , et f la transformation qui à tout point M associe le point $f(M) = s'(s(M))$. Déterminer l'expression analytique de f et reconnaître la nature de f (on précisera ses éléments caractéristiques). (1,5 pt)

Produit scalaire

Exercice 3 (8 points). Partie A. Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\hat{A} = 60^\circ$. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (1 pt)
2. Calculer BC . (1 pt)
3. Calculer AI . (1 pt)
4. Montrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2)$, puis calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$. (1 pt)

Partie B. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$ et $C(1; -3)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A . (1 pt)
2. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[BC]$. Déterminer les coordonnées de son centre Ω et son rayon r . Justifier que $A \in (\mathcal{C})$. (1 pt)
3. Montrer qu'une équation de $(\mathcal{C})$ est $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$. (1 pt)
4. Soit $D(5; 1)$. Vérifier que $D \in (\mathcal{C})$ et calculer $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour le triangle DBC ? (1 pt)