

Devoir surveillé n°3 : Corrigé

Semestre 2, devoir 1

Équations et inéquations trigonométriques

Solution 1.

- $2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \iff \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, donc $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 - $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, donc $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 - $\tan x = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, donc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (la tangente est π -périodique).
- On pose $X = \cos x$; l'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, d'où $X = \frac{-1-3}{4} = -1$ ou $X = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$.
 - $\cos x = -1$: dans $[0, 2\pi[$, l'unique solution est $x = \pi$.
 - $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$: dans $[0, 2\pi[$, $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.
 Donc $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$.
- $2 \sin x - 1 \geq 0 \iff \sin x \geq \frac{1}{2}$. L'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ a pour solutions dans $] -\pi, \pi]$ les réels $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Sur le cercle trigonométrique, les points d'ordonnée supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ forment l'arc allant du point d'angle $\frac{\pi}{6}$ au point d'angle $\frac{5\pi}{6}$ en passant par le point d'angle $\frac{\pi}{2}$ (le « haut » du cercle). Donc $S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Transformations du plan

Solution 2.

- $A_1 = t(A)$ signifie $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$, donc $A_1(2+3; 1-2)$, soit $A_1(5; -1)$.
 $t(B) = O$ signifie $\overrightarrow{BO} = \vec{u}$, donc $B(0-3; 0+2)$, soit $B(-3; 2)$.
- Ω est le milieu de $[MM']$ où $M' = s(M)$, donc $x' = 2x_\Omega - x$ et $y' = 2y_\Omega - y$:

$$s : \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -2 - y \end{cases}$$

Pour $A(2; 1)$: $A_2(2-2; -2-1)$, soit $A_2(0; -3)$.

- $M' = h(M)$ signifie $\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$, soit $x' - 1 = -2(x - 1)$ et $y' + 1 = -2(y + 1)$:

$$h : \begin{cases} x' = 3 - 2x \\ y' = -3 - 2y \end{cases}$$

(b) $A_3(3-4; -3-2)$, soit $A_3(-1; -5)$. On a $\overrightarrow{\Omega A}(1; 2)$ et $\overrightarrow{\Omega A_3}(-2; -4)$, et $-2\overrightarrow{\Omega A}$ a pour coordonnées $(-2; -4)$: on a bien $\overrightarrow{\Omega A_3} = -2\overrightarrow{\Omega A}$.

4. L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle : (D') a une équation de la forme $y = 2x + p$. Le point $M(0; 3)$ appartient à (D) , donc $h(M)(3; -9)$ appartient à (D') : $-9 = 2 \times 3 + p$, d'où $p = -15$. Donc $(D') : y = 2x - 15$. (Vérification avec $N(-1; 1) \in (D)$: $h(N)(5; -5)$ et $2 \times 5 - 15 = -5$.)
5. Expression analytique de s' : $x' = 2 \times 4 - x = 8 - x$ et $y' = 2 \times 1 - y = 2 - y$. Soit $M(x; y)$; alors $s(M)(2 - x; -2 - y)$, puis $f(M) = s'(s(M))(8 - (2 - x); 2 - (-2 - y))$, soit

$$f : \begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y + 4 \end{cases}.$$

Pour tout point M , le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ a pour coordonnées $(6; 4)$: f est la translation de vecteur $\vec{v}(6; 4)$. On remarque que $\overrightarrow{\Omega\Omega'}(3; 2)$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, conformément au cours : la composée de deux symétries centrales de centres Ω et Ω' est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

Produit scalaire

Solution 3.

Partie A.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A}) = 4 \times 6 \times \cos 60^\circ = 24 \times \frac{1}{2} = 12$.
2. Théorème d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A}) = 16 + 36 - 2 \times 12 = 28$. Donc $BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.
3. Théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$, soit $16 + 36 = 2AI^2 + 14$, d'où $AI^2 = 19$ et $AI = \sqrt{19}$.
4. Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, et par la relation de Chasles $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Donc, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2)$. Numériquement : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(36 - 16) = 10$.

Partie B.

1. $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -4)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2 + 2 \times (-4) = 8 - 8 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : le triangle ABC est rectangle en A .
2. Le centre du cercle de diamètre $[BC]$ est le milieu de $[BC]$: $\Omega(\frac{3+1}{2}; \frac{3-3}{2})$, soit $\Omega(2; 0)$. Son rayon est $r = \frac{BC}{2}$ avec $BC = \sqrt{(1-3)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, donc $r = \sqrt{10}$.
D'après la question 1, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$; or le cercle de diamètre $[BC]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, donc $A \in (C)$. (On peut aussi vérifier : $\Omega A = \sqrt{(-1-2)^2 + 1^2} = \sqrt{10} = r$.)
3. $M(x; y) \in (C) \iff \Omega M^2 = r^2 \iff (x-2)^2 + y^2 = 10 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = 10 \iff x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$.
4. $5^2 + 1^2 - 4 \times 5 - 6 = 25 + 1 - 20 - 6 = 0$, donc $D \in (C)$. $\overrightarrow{DB}(-2; 2)$ et $\overrightarrow{DC}(-4; -4)$, donc $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = (-2)(-4) + 2 \times (-4) = 8 - 8 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux : le triangle DBC est rectangle en D , ce qui est cohérent avec le fait que D appartient au cercle de diamètre $[BC]$.