

Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Semestre 1, devoir 2

Polynômes et équations

Solution 1.

1. $P(-2) = 2 \times (-8) - 3 \times 4 - 11 \times (-2) + 6 = -16 - 12 + 22 + 6 = 0$. Donc -2 est une racine de P .
2. On développe : $(x+2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + 2c$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux ; par identification avec $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$: $a = 2$, $2a+b = -3$ donc $b = -7$, et $2c = 6$ donc $c = 3$. On vérifie le coefficient de x : $2b+c = -14+3 = -11$. Ainsi $P(x) = (x+2)(2x^2-7x+3)$.
3. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $P(x) = 0 \iff x+2=0$ ou $2x^2-7x+3=0$. Pour le trinôme, $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25 > 0$, d'où deux racines $x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{7+5}{4} = 3$. Donc $S = \{-2, \frac{1}{2}, 3\}$.
4. D'après la question 3, $2x^2-7x+3 = 2(x-\frac{1}{2})(x-3) = (2x-1)(x-3)$, donc $P(x) = (x+2)(2x-1)(x-3)$. Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	
$2x-1$		$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	
$x-3$		$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x) \geq 0$ sur $[-2, \frac{1}{2}]$ et sur $[3, +\infty[$: $S = [-2, \frac{1}{2}] \cup [3, +\infty[$.

5. $|2x-1| = 5 \iff 2x-1 = 5$ ou $2x-1 = -5 \iff x = 3$ ou $x = -2$. Donc $S = \{-2, 3\}$. On remarque que les deux solutions sont des racines du polynôme P .

Trigonométrie

Solution 2.

1. 180° correspond à π rad, donc $150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad. Réciproquement, $\frac{7\pi}{4}$ rad $= \frac{7}{4} \times 180^\circ = 315^\circ$.
2. (a) D'après la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\cos x = \frac{4}{5}$ ou $\cos x = -\frac{4}{5}$. Comme $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ (deuxième quadrant), $\cos x < 0$, donc $\cos x = -\frac{4}{5}$. Puis $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$.
 (b) Formules de réduction : $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{4}{5}$; $\sin(\pi + x) = -\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x = \frac{3}{5}$.

3. (a) $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ donc $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ donc $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Ainsi $E = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{\sqrt{3}+3}{2}$.
- (b) De $1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$ on tire $4,732 \leq \sqrt{3} + 3 \leq 4,733$, puis en divisant par 2 : $2,366 \leq \frac{\sqrt{3}+3}{2} \leq 2,3665$. En passant aux opposés (le sens change) : $-2,3665 \leq E \leq -2,366$.

Géométrie analytique

Solution 3.

- (a) $\overrightarrow{AB}(3 - (-1); 4 - 2)$, soit $\overrightarrow{AB}(4; 2)$, et $\overrightarrow{AC}(4 - (-1); -3 - 2)$, soit $\overrightarrow{AC}(5; -5)$.
(b) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \times (-5) - 5 \times 2 = -20 - 10 = -30 \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A , B et C ne sont pas alignés.
- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. En notant $D(x; y)$, $\overrightarrow{DC}(4 - x; -3 - y)$, d'où $4 - x = 4$ et $-3 - y = 2$, soit $x = 0$ et $y = -5$. Donc $D(0; -5)$.
- Le centre de gravité vérifie $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, donc $x_G = \frac{-1+3+4}{3} = 2$ et $y_G = \frac{2+4-3}{3} = 1$: $G(2; 1)$.
- Un point $M(x; y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}(x+1; y-2)$ et $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ sont colinéaires : $(x+1) \times 2 - 4(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x+2-4y+8=0 \Leftrightarrow 2x-4y+10=0$. En divisant par 2 : $(AB) : x-2y+5=0$. (Vérification : $-1-4+5=0$ et $3-8+5=0$.)
- L'équation réduite de (AB) est $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$: sa pente est $m = \frac{1}{2}$. Dans un repère orthonormé, (Δ) est perpendiculaire à (AB) si et seulement si $mm' = -1$, donc $m' = -2$ et $(\Delta) : y = -2x + p$. Comme $C(4; -3) \in (\Delta) : -3 = -8 + p$, d'où $p = 5$. Donc $(\Delta) : y = -2x + 5$.
- (a) Les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ y=-2x+5 \end{cases}$. En remplaçant : $x-2(-2x+5)+5=0 \Leftrightarrow 5x-5=0 \Leftrightarrow x=1$, puis $y=-2+5=3$. Donc $H(1; 3)$.
(b) Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{-1+3}{2}; \frac{2+4}{2}) = (1; 3)$: c'est bien H . La droite (CH) est à la fois perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de $[AB]$: c'est la médiatrice de $[AB]$, donc $CA = CB$ et le triangle ABC est isocèle en C . (On peut aussi vérifier : $CA = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$ et $CB = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$.)
- $d(C, (AB)) = \frac{|1 \times 4 - 2 \times (-3) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$. Cette distance est la hauteur issue de C ; comme $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, l'aire du triangle vaut $\frac{1}{2} \times AB \times d(C, (AB)) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 15$ (unités d'aire).
- La projection p sur (AC) parallèlement à (BC) laisse fixe le point A (il est sur (AC)) et envoie B sur C (la parallèle à (BC) passant par B est (BC) elle-même, qui coupe (AC) en C). Or la projection conserve le milieu : H étant le milieu de $[AB]$, son projeté $p(H)$ est le milieu de $[p(A)p(B)] = [AC]$. Donc $p(H)(\frac{-1+4}{2}; \frac{2-3}{2})$, soit $p(H)(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$.