

Devoir surveillé n°1 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 1

Durée : 1 heure. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation. Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 6 + 8 points.

Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Exercice 1 (6 points).

1. Effectuer la division euclidienne de 1547 par 23 (on précisera le quotient et le reste). (1 pt)
2. (a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 1386 et 504. (1,5 pt)
 (b) En déduire $\text{pgcd}(1386, 504)$ et $\text{ppcm}(1386, 504)$. (1,5 pt)
3. Retrouver la valeur de $\text{pgcd}(1386, 504)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide. (1 pt)
4. Le nombre 143 est-il premier ? Justifier. (1 pt)

Ensembles de nombres

Exercice 2 (6 points).

1. Pour chacun des nombres suivants, indiquer le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auquel il appartient, en justifiant brièvement :

$$-8, \quad \frac{3}{8}, \quad \sqrt{36}, \quad \frac{5}{6}, \quad \sqrt{5}.$$

(1,5 pt)

2. On pose $x = 0,\overline{27} = 0,272727\dots$
 - (a) Calculer $100x - x$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que x est un nombre rationnel et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible. (1 pt)
3. Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ le nombre $A = \sqrt{75} - 2\sqrt{27} + \sqrt{48}$. (1 pt)
4. Rationaliser le dénominateur et simplifier $B = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$. (1 pt)
5. On admet que $\sqrt{5}$ est irrationnel. Démontrer, par un raisonnement par l'absurde, que le nombre B est irrationnel. (1 pt)

Ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice 3 (8 points). Partie A. Comparaisons.

1. Comparer, sans calculatrice, les nombres $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$. (1 pt)
2. Montrer que pour tous réels a et b : $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. (1 pt)

Partie B. Encadrements. Soient x et y deux réels tels que $1 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq y \leq -1$.

1. Encadrer $x+y$, $x-y$ et xy . (1,5 pt)
2. Encadrer x^2 et $\frac{1}{x}$. (1 pt)
3. En déduire un encadrement de $A = \frac{2x+3}{x}$. (1 pt)

Partie C. Valeur approchée et valeur absolue.

1. On donne $2,236 \leq \sqrt{5} \leq 2,237$. Encadrer le nombre $B = 3\sqrt{5} - 1$ et préciser l'amplitude de cet encadrement. (1 pt)
2. En déduire une valeur approchée de B à 10^{-2} près. (0,5 pt)
3. Soit x un réel tel que $1 \leq x \leq 3$. Montrer que $|x-2| \leq 1$, puis que $|x^2 - 4| \leq 5$. (1 pt)