

Devoir surveillé n°1 : Corrigé

Semestre 1, devoir 1

Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Solution 1.

- On cherche le plus grand multiple de 23 inférieur ou égal à 1547 : $23 \times 67 = 1541$ et $23 \times 68 = 1564 > 1547$. Donc $1547 = 23 \times 67 + 6$ avec $0 \leq 6 < 23$: le quotient est 67 et le reste est 6.
- (a) $1386 = 2 \times 693 = 2 \times 3 \times 231 = 2 \times 3 \times 3 \times 77 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$.
 $504 = 2 \times 252 = 2^2 \times 126 = 2^3 \times 63 = 2^3 \times 3^2 \times 7$.
 (b) Le PGCD s'obtient en prenant chaque facteur premier commun avec le plus petit exposant : $\text{pgcd}(1386, 504) = 2 \times 3^2 \times 7 = 126$. Le PPCM s'obtient en prenant chaque facteur premier avec le plus grand exposant : $\text{ppcm}(1386, 504) = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11 = 5544$.
 Vérification : $126 \times 5544 = 698\,544 = 1386 \times 504$.
- Algorithme d'Euclide (le PGCD de deux nombres est celui du diviseur et du reste) :
 - $1386 = 504 \times 2 + 378$;
 - $504 = 378 \times 1 + 126$;
 - $378 = 126 \times 3 + 0$.
 Le dernier reste non nul est 126, donc $\text{pgcd}(1386, 504) = 126$, ce qui confirme le résultat de la question 2.
- $\sqrt{143} \approx 11,96$: il suffit de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à 11, c'est-à-dire 2, 3, 5, 7, 11. Or $143 = 11 \times 13$, donc 143 admet un diviseur autre que 1 et lui-même : 143 n'est pas premier.

Ensembles de nombres

Solution 2.

- $-8 \in \mathbb{Z}$ et $-8 \notin \mathbb{N}$ (entier négatif) : le plus petit ensemble est $\mathbb{Z}$.
 - $\frac{3}{8} = 0,375 = \frac{375}{10^3}$: c'est un décimal non entier, le plus petit ensemble est $\mathbb{D}$.
 - $\sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}$: le plus petit ensemble est $\mathbb{N}$.
 - $\frac{5}{6}$ est un rationnel ; sa forme irréductible a pour dénominateur $6 = 2 \times 3$, qui contient le facteur 3, donc $\frac{5}{6} \notin \mathbb{D}$ (son développement décimal 0,8333... est infini). Le plus petit ensemble est $\mathbb{Q}$.
 - $\sqrt{5}$ est irrationnel (5 n'est pas un carré parfait) : le plus petit ensemble est $\mathbb{R}$.
- (a) $100x = 27,272727\dots$ et $x = 0,272727\dots$ ont la même partie décimale, donc $100x - x = 27$.
 (b) $100x - x = 99x = 27$, d'où $x = \frac{27}{99}$. Comme $27 = 3^3$ et $99 = 3^2 \times 11$, on simplifie par 9 :

- $x = \frac{3}{11}$. Le nombre x est le quotient de deux entiers, c'est donc un rationnel, et $0,\overline{27} = \frac{3}{11}$ (fraction irréductible car 3 et 11 sont premiers entre eux).
3. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$ et $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$. Donc $A = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
4. On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{5} + 1$: $B = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5} + 1$.
5. Raisonnons par l'absurde : supposons que $B = \sqrt{5} + 1$ soit rationnel. Alors $\sqrt{5} = B - 1$ serait la différence de deux nombres rationnels (B et 1), donc un nombre rationnel. Cela contredit l'irrationalité de $\sqrt{5}$ admise dans l'énoncé. Donc B est irrationnel.

Ordre dans $\mathbb{R}$

Solution 3.

Partie A.

- Les deux nombres sont strictement positifs, on compare donc leurs carrés (la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$) : $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ et $(2\sqrt{11})^2 = 4 \times 11 = 44$. Comme $45 > 44$, on conclut que $3\sqrt{5} > 2\sqrt{11}$.
- $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$. Donc $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ pour tous réels a et b (avec égalité si et seulement si $a = b$).

Partie B.

- Somme** : on ajoute membre à membre $1 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq y \leq -1$: $-1 \leq x + y \leq 2$.
Différence : de $-2 \leq y \leq -1$ on tire $1 \leq -y \leq 2$, puis en ajoutant à $1 \leq x \leq 3$: $2 \leq x - y \leq 5$.
Produit : $x > 0$ et $-y > 0$, on peut multiplier membre à membre les encadrements de nombres positifs $1 \leq x \leq 3$ et $1 \leq -y \leq 2$: $1 \leq -xy \leq 6$, donc $-6 \leq xy \leq -1$.
- La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$ et $1 \leq x \leq 3$, donc $1 \leq x^2 \leq 9$. La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$.
- $A = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$. De $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ on tire $1 \leq \frac{3}{x} \leq 3$, puis $3 \leq A \leq 5$.

Partie C.

- On multiplie par $3 > 0$: $6,708 \leq 3\sqrt{5} \leq 6,711$, puis on retranche 1 : $5,708 \leq B \leq 5,711$. L'amplitude de cet encadrement est $5,711 - 5,708 = 0,003$.
- Le nombre 5,71 appartient à l'intervalle $[5,708; 5,711]$, tout comme B , donc $|B - 5,71| \leq 0,003 < 10^{-2}$: 5,71 est une valeur approchée de B à 10^{-2} près.
- De $1 \leq x \leq 3$ on tire, en retranchant 2 : $-1 \leq x - 2 \leq 1$, c'est-à-dire $|x - 2| \leq 1$. Ensuite $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2| \times |x + 2|$. Or $x + 2 \geq 3 > 0$, donc $|x + 2| = x + 2 \leq 5$. Ainsi $|x^2 - 4| \leq 1 \times 5 = 5$.