

Devoir surveillé n°4 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 2 : probabilités, nombres complexes et problème d'analyse

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 4 + 5 + 11 points.

Nombres complexes

Exercice 1 (4 points). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$. (1 pt)
2. On pose $z_1 = 3 + i$ et $z_2 = 1 - 2i$. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$. (1,5 pt)
3. Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$, puis vérifier que $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$. (0,5 pt)
4. On rappelle que si A et M sont deux points d'affixes respectives a et z , alors $AM = |z - a|$. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $|z - 2| = 3$, puis vérifier que les points A et B d'affixes respectives $2 + 3i$ et $2 - 3i$ appartiennent à (Γ) . (1 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 2 (5 points). Partie A. Une urne contient six boules indiscernables au toucher : trois boules rouges, deux boules vertes et une boule noire. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 R : « les deux boules tirées sont rouges » ; (0,5 pt)
 D : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ». (0,5 pt)
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
 (a) Déterminer la loi de probabilité de X . (1 pt)
 (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$. (0,75 pt)

Partie B. Dans une population, 10% des individus sont atteints d'une maladie. On dispose d'un test de dépistage : il est positif chez 90% des individus malades et positif chez 20% des individus sains. On choisit un individu au hasard et l'on note M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation et donner $P(M)$, $P(T | M)$ et $P(T | \overline{M})$. (0,5 pt)
2. Montrer que $P(T) = 0,27$. (0,75 pt)
3. Le test d'un individu est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ? (0,5 pt)
4. Les événements M et T sont-ils indépendants ? Justifier. (0,5 pt)

Problème d'analyse

Exercice 3 (11 points). Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

Partie A. Étude de la fonction f .

- (a) Montrer que $f(x) = \ln x(\ln x - 2)$ pour tout $x > 0$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat. (0,75 pt)
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,75 pt)
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \ln x$) et interpréter graphiquement le résultat. (0,75 pt)
- Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$, puis dresser le tableau de variations de f . (1,75 pt)
- Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$, puis étudier le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$. (1 pt)
- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1. (0,5 pt)
- Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ (on prendra $e \approx 2,7$ et $e^2 \approx 7,4$). (1 pt)
- Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. (1 pt)

Partie B. Calcul d'aire.

- À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_1^{e^2} \ln x \, dx$. (1 pt)
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J = \int_1^{e^2} (\ln x)^2 \, dx = 2e^2 - 2$. (1,25 pt)
- En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$. (1,25 pt)