

Devoir surveillé n°4 : Corrigé

Semestre 2, devoir 2 : probabilités, nombres complexes et problème d'analyse

Nombres complexes

Solution 1.

- Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36 < 0$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$, soit $S = \{2 + 3i, 2 - 3i\}$.
- $z_1 + z_2 = (3 + 1) + (1 - 2)i = 4 - i$.
 $z_1 z_2 = (3 + i)(1 - 2i) = 3 - 6i + i - 2i^2 = 3 - 5i + 2 = 5 - 5i$.
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+i+2i^2}{1+4} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$.
- $|z_1| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ et $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$. D'autre part $|z_1 z_2| = |5 - 5i| = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, et $|z_1| \times |z_2| = \sqrt{10} \times \sqrt{5} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$: on a bien $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- Soit Ω le point d'affixe 2. Pour tout point M d'affixe z , $|z - 2| = \Omega M$. Donc $M \in (\Gamma) \iff \Omega M = 3$: (Γ) est le cercle de centre $\Omega(2, 0)$ et de rayon 3. Pour $A : |(2 + 3i) - 2| = |3i| = 3$; pour $B : |(2 - 3i) - 2| = |-3i| = 3$. Les points A et B appartiennent bien à (Γ) (ce sont les points du cercle situés sur la verticale de Ω).

Calcul des probabilités

Solution 2.

Partie A. Les tirages sont simultanés : l'univers est l'ensemble des paires de boules, équiprobables, et $\text{card } \Omega = \binom{6}{2} = 15$.

- R : on choisit 2 boules parmi les 3 rouges : $\binom{3}{2} = 3$ cas. $P(R) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.
 D : l'événement contraire $\overline{D}$ « les deux boules sont de la même couleur » se réalise avec deux rouges (3 cas) ou deux vertes ($\binom{2}{2} = 1$ cas) ; une seule boule noire ne peut donner deux noires. $P(\overline{D}) = \frac{4}{15}$, donc $P(D) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$.
- (a) X prend les valeurs 0, 1, 2. $P(X = 0)$: deux boules parmi les 3 non rouges : $\binom{3}{2} = 3$ cas, $P(X = 0) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. $P(X = 1)$: une rouge parmi 3 et une non rouge parmi 3 : $3 \times 3 = 9$ cas, $P(X = 1) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. $P(X = 2) = P(R) = \frac{1}{5}$. Contrôle : $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 1$.
 (b) $E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$. $E(X^2) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 4 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$.

Partie B.

- L'arbre a deux branches issues de la racine, M (probabilité 0,1) et $\overline{M}$ (probabilité 0,9) ; de M partent T (0,9) et $\overline{T}$ (0,1) ; de $\overline{M}$ partent T (0,2) et $\overline{T}$ (0,8). Ainsi $P(M) = 0,1$, $P(T | M) = 0,9$ et $P(T | \overline{M}) = 0,2$.

2. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(T | M)P(M) + P(T | \overline{M})P(\overline{M}) = 0,9 \times 0,1 + 0,2 \times 0,9 = 0,09 + 0,18 = 0,27$.
3. On cherche $P(M | T)$. D'après la formule de Bayes : $P(M | T) = \frac{P(T | M)P(M)}{P(T)} = \frac{0,09}{0,27} = \frac{1}{3}$.
Un individu dont le test est positif a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'être malade.
4. $P(M \cap T) = P(T | M)P(M) = 0,09$ et $P(M) \times P(T) = 0,1 \times 0,27 = 0,027$. Comme $P(M \cap T) \neq P(M) \times P(T)$, les événements M et T ne sont pas indépendants (on peut aussi remarquer que $P(M | T) = \frac{1}{3} \neq P(M)$).

Problème d'analyse

Solution 3.

Partie A.

1. (a) Pour $x > 0$: $\ln x(\ln x - 2) = (\ln x)^2 - 2 \ln x = f(x)$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\ln x - 2 \rightarrow -\infty$; par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. L'axe des ordonnées (droite $x = 0$) est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
(b) Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$ et $\ln x - 2 \rightarrow +\infty$; par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Pour $x > 0$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Pour le premier terme, on pose $t = \ln x$, de sorte que $x = e^t$ et $t \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{t^2}{e^t} = \frac{1}{\frac{e^t}{t^2}} \rightarrow 0$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$ (croissance comparée). Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses en $+\infty$.
3. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, avec $((\ln x)^2)' = 2 \ln x \times \frac{1}{x}$: $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$, qui est négatif pour $0 < x < e$, nul en e et positif pour $x > e$ ($\ln$ strictement croissante, $\ln e = 1$). Donc f est strictement décroissante sur $]0, e]$ et strictement croissante sur $[e, +\infty[$; elle admet un minimum en e égal à $f(e) = 1 - 2 = -1$. Limites : $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$.
4. $f(x) = 0 \iff \ln x(\ln x - 2) = 0 \iff \ln x = 0$ ou $\ln x = 2 \iff x = 1$ ou $x = e^2$. Donc $S = \{1, e^2\}$. Signe : $f(x)$ est du signe du produit $\ln x(\ln x - 2)$. Pour $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ et $\ln x - 2 < 0$: $f(x) > 0$. Pour $1 < x < e^2$, $\ln x > 0$ et $\ln x - 2 < 0$: $f(x) < 0$. Pour $x > e^2$, les deux facteurs sont positifs : $f(x) > 0$. Ainsi $f(x) \geq 0$ sur $]0, 1] \cup [e^2, +\infty[$ et $f(x) \leq 0$ sur $[1, e^2]$.
5. $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{2(0-1)}{1} = -2$. $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -2(x - 1)$, soit $y = -2x + 2$.
6. Tracé : $(\mathcal{C})$ descend de $+\infty$ le long de l'axe des ordonnées, coupe l'axe des abscisses en $(1, 0)$ avec la tangente (T) de pente -2 , atteint son minimum $(e, -1)$ (tangente horizontale), recoupe l'axe des abscisses en $(e^2, 0)$ puis remonte lentement (branche parabolique de direction l'axe des abscisses). Points utiles : $f(0,5) \approx 1,87$, $f(2) \approx -0,91$, $f(4) \approx -0,85$, $f(10) \approx 0,70$.
7. Les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de la droite horizontale $y = m$. D'après le tableau de variations (minimum -1 atteint en e , limites $+\infty$ des deux côtés) :
si $m < -1$: aucune solution ;
si $m = -1$: une solution unique, $x = e$;
si $m > -1$: exactement deux solutions, l'une dans $]0, e]$ et l'autre dans $[e, +\infty[$ (sur chacun de ces intervalles, f est continue, strictement monotone et prend toutes les valeurs de $] -1, +\infty[$).

Partie B.

1. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$, fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1, e^2]$. Par intégration par parties : $I = [x \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \times \frac{1}{x} dx = e^2 \ln(e^2) - 1 \times \ln 1 - \int_1^{e^2} 1 dx = 2e^2 - [x]_1^{e^2} = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1$.
2. On pose $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ et $v(x) = x$: $J = [x(\ln x)^2]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \times \frac{2 \ln x}{x} dx = e^2 (\ln e^2)^2 - 0 - 2 \int_1^{e^2} \ln x dx = 4e^2 - 2I = 4e^2 - 2(e^2 + 1) = 2e^2 - 2$.
3. Par linéarité, $\int_1^{e^2} f(x) dx = J - 2I = (2e^2 - 2) - 2(e^2 + 1) = -4$. D'après la question A.4, $f(x) \leq 0$ sur $[1, e^2]$: l'aire du domaine vaut donc $-\int_1^{e^2} f(x) dx = 4$ unités d'aire. L'unité graphique étant 1 cm, une unité d'aire vaut 1 cm² : $\mathcal{A} = 4$ cm².