

Devoir surveillé n°3 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 1 : calcul intégral et équations différentielles

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 5 + 5 + 10 points.

Calcul intégral

Exercice 1 (5 points).

1. Calculer les intégrales suivantes :
 - (a) $I_1 = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx$; (0,75 pt)
 - (b) $I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$; (0,75 pt)
 - (c) $I_3 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$. (0,75 pt)
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :
 - (a) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; (1 pt)
 - (b) $I_5 = \int_1^e x \ln x dx$. (1 pt)
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \rightarrow x^2$ sur l'intervalle $[0, 3]$. (0,75 pt)

Équations différentielles

Exercice 2 (5 points).

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y' = -2y$, puis déterminer la solution f de (E_1) telle que $f(0) = 3$. (1 pt)
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' + 2y = 6$, puis déterminer la solution g de (E_2) telle que $g(0) = 1$. (1 pt)
3. Résoudre l'équation différentielle $(E_3) : y'' + 9y = 0$, puis déterminer la solution h de (E_3) telle que $h(0) = 2$ et $h'(0) = -3$. (1,25 pt)
4. Un médicament est injecté à un patient. On note $C(t)$ sa concentration dans le sang (en mg/L) à l'instant t (en heures). On admet que C est solution de l'équation différentielle $y' = -0,2y$ et que $C(0) = 10$.
 - (a) Exprimer $C(t)$ en fonction de t . (0,5 pt)
 - (b) Au bout de combien de temps la concentration est-elle divisée par deux ? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,1 h près. (0,75 pt)
 - (c) Le médicament cesse d'agir lorsque la concentration devient inférieure à 1 mg/L. Au bout de combien de temps cela se produit-il ? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,1 h près. (0,5 pt)

Problème d'analyse

Exercice 3 (10 points). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie A. Étude de la fonction f .

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce dernier résultat. (1,25 pt)
2. Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = -xe^{-x}$, puis dresser le tableau de variations de f . (1,25 pt)
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1 . (0,5 pt)
4. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ (on prendra $e \approx 2,7$). (0,75 pt)

Partie B. Une équation différentielle. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

1. Vérifier que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
2. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E) si et seulement si la fonction $g - f$ est solution de l'équation $(E_0) : y' = -y$. (1 pt)
3. En déduire toutes les solutions de (E) , puis déterminer la solution g de (E) telle que $g(0) = 3$. (1 pt)

Partie C. Calcul d'aire.

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -(x+2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
2. Calculer $J = \int_0^1 f(x) dx$, puis en déduire, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (1,25 pt)
3. Calculer $\int_0^1 e^{-x} dx$ et en déduire la valeur de $K = \int_0^1 xe^{-x} dx$. (1 pt)
4. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1] : \frac{x+1}{e} \leq f(x) \leq x+1$. (0,5 pt)
(b) En déduire que $\frac{3}{2e} \leq J \leq \frac{3}{2}$. (0,5 pt)