

Devoir surveillé n°3 : Corrigé

Semestre 2, devoir 1 : calcul intégral et équations différentielles

Calcul intégral

Solution 1.

- (a) Une primitive de $3x^2 - 2x + 1$ est $x^3 - x^2 + x$, donc $I_1 = [x^3 - x^2 + x]_0^1 = (1 - 1 + 1) - 0 = 1$.
 (b) $\frac{\ln x}{x} = u'(x)u(x)$ avec $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$; une primitive est $\frac{1}{2}(\ln x)^2$. Donc $I_2 = [\frac{1}{2}(\ln x)^2]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}$.
 (c) $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$ est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$; une primitive est $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$. Donc $I_3 = [\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- (a) On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sin x$; u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par intégration par parties : $I_4 = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2}) - 0 - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - (-\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$.
 (b) On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$, fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1, e]$: $I_5 = [\frac{x^2}{2} \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - [\frac{x^2}{4}]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$.
- La valeur moyenne de $x \rightarrow x^2$ sur $[0, 3]$ est $\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 \, dx = \frac{1}{3} [\frac{x^3}{3}]_0^3 = \frac{1}{3} \times \frac{27}{3} = 3$.

Équations différentielles

Solution 2.

- (E_1) est de la forme $y' = ay$ avec $a = -2$: ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$. $f(0) = 3 \Leftrightarrow Ce^0 = 3 \Leftrightarrow C = 3$. Donc $f(x) = 3e^{-2x}$.
- (E_2) s'écrit $y' = -2y + 6$, de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 6$: ses solutions sont $y(x) = Ce^{-2x} - \frac{b}{a} = Ce^{-2x} + 3$, $C \in \mathbb{R}$ (la fonction constante 3 est une solution particulière). $g(0) = 1 \Leftrightarrow C + 3 = 1 \Leftrightarrow C = -2$. Donc $g(x) = 3 - 2e^{-2x}$. Vérification : $g'(x) = 4e^{-2x}$ et $g' + 2g = 4e^{-2x} + 6 - 4e^{-2x} = 6$.
- (E_3) est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 3$: ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont $y(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$, $A, B \in \mathbb{R}$. Alors $y'(x) = -3A \sin(3x) + 3B \cos(3x)$. $h(0) = 2 \Leftrightarrow A = 2$; $h'(0) = -3 \Leftrightarrow 3B = -3 \Leftrightarrow B = -1$. Donc $h(x) = 2 \cos(3x) - \sin(3x)$.
- (a) C est solution de $y' = -0,2y$, donc $C(t) = Ke^{-0,2t}$ avec $K = C(0) = 10$: $C(t) = 10e^{-0,2t}$.
 (b) On cherche t tel que $C(t) = 5$: $10e^{-0,2t} = 5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,2t = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,2} = 5 \ln 2$. La concentration est divisée par deux au bout de $5 \ln 2 \approx 3,5$ heures.
 (c) Comme C est strictement décroissante (car $-0,2 < 0$), on cherche l'instant où $C(t) = 1$:

$10e^{-0,2t} = 1 \iff e^{-0,2t} = \frac{1}{10} \iff -0,2t = -\ln 10 \iff t = 5 \ln 10$. Le médicament cesse d'agir au bout de $5 \ln 10 \approx 11,5$ heures.

Problème d'analyse

Solution 3.

Partie A.

1. En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. En $+\infty$: $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$; et $\frac{1}{e^x} \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables) et $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1-x-1) = -xe^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x$: f est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$; elle admet un maximum en 0 égal à $f(0) = 1$. Limites : $-\infty$ en $-\infty$, 0 en $+\infty$.
3. $f(-1) = 0 \times e^1 = 0$ et $f'(-1) = -(-1)e^1 = e$. $(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = e(x+1)$, soit $y = ex + e$.
4. Tracé : $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en $(-1, 0)$, où elle est tangente à (T) (pente $e \approx 2,7$), monte jusqu'au maximum $(0, 1)$ (tangente horizontale), puis décroît vers l'axe des abscisses en restant au-dessus. Points utiles : $f(1) = \frac{2}{e} \approx 0,74$, $f(2) = \frac{3}{e^2} \approx 0,41$, $f(-2) = -e^2 \approx -7,4$.

Partie B.

1. $f'(x) + f(x) = -xe^{-x} + (x+1)e^{-x} = e^{-x}(-x+x+1) = e^{-x}$ pour tout réel x : f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Posons $k = g - f$, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $k' = g' - f'$. Alors $k' + k = (g' + g) - (f' + f) = (g' + g) - e^{-x}$ (question 1). Donc : g solution de $(E) \iff g' + g = e^{-x} \iff k' + k = 0 \iff k' = -k \iff k = g - f$ solution de (E_0) .
3. Les solutions de $(E_0) : y' = -y$ sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. D'après la question 2, les solutions de (E) sont donc les fonctions $g(x) = f(x) + Ce^{-x} = (x+1+C)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. $g(0) = 3 \iff (1+C)e^0 = 3 \iff C = 2$. Donc $g(x) = (x+3)e^{-x}$.

Partie C.

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -1 \times e^{-x} + (-(x+2)) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(-1+x+2) = (x+1)e^{-x} = f(x)$: F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. $J = F(1) - F(0) = -3e^{-1} - (-2e^0) = 2 - \frac{3}{e}$. Sur $[0, 1]$, $f(x) > 0$ (car $x+1 > 0$ et $e^{-x} > 0$), donc l'aire cherchée vaut J unités d'aire. L'unité graphique étant 2 cm, une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$: $\mathcal{A} = 4J = 4(2 - \frac{3}{e}) = 8 - \frac{12}{e} \approx 3,59 \text{ cm}^2$.
3. Une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$, donc $\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$. Par linéarité, $J = \int_0^1 xe^{-x} dx + \int_0^1 e^{-x} dx = K + (1 - \frac{1}{e})$, donc $K = J - (1 - \frac{1}{e}) = 2 - \frac{3}{e} - 1 + \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$.
4. (a) Pour $x \in [0, 1]$: $-1 \leq -x \leq 0$, et la fonction exponentielle étant croissante, $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$, soit $\frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1$. En multipliant par $x+1 > 0$: $\frac{x+1}{e} \leq (x+1)e^{-x} \leq x+1$, c'est-à-dire $\frac{x+1}{e} \leq f(x) \leq x+1$.
(b) Les trois fonctions sont continues sur $[0, 1]$; par monotonie de l'intégrale (avec $0 < 1$) :

$$\int_0^1 \frac{x+1}{e} dx \leq J \leq \int_0^1 (x+1) dx. \text{ Or } \int_0^1 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{3}{2}, \text{ donc } \frac{1}{e} \times \frac{3}{2} \leq J \leq \frac{3}{2}, \text{ soit } \frac{3}{2e} \leq J \leq \frac{3}{2}. \text{ (Cohérence : } \frac{3}{2e} \approx 0,55, J = 2 - \frac{3}{e} \approx 0,90 \text{ et } \frac{3}{2} = 1,5.)$$