

# Devoir surveillé n°2 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 2 : fonctions primitives, logarithme népérien et exponentielle

**Durée : 2 heures.** L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.  
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 4 + 5 + 5 + 6 points.

## Fonctions primitives

---

**Exercice 1 (4 points).**

- Déterminer une primitive sur l'intervalle  $I$  indiqué de chacune des fonctions suivantes :
  - $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 1$  sur  $I = \mathbb{R}$ . (0,75 pt)
  - $f_2(x) = x(x^2 + 1)^3$  sur  $I = \mathbb{R}$ . (0,75 pt)
  - $f_3(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$  sur  $I = \mathbb{R}$  (on vérifiera d'abord que  $x^2 + x + 3 > 0$  pour tout réel  $x$ ). (0,75 pt)
  - $f_4(x) = xe^{x^2}$  sur  $I = \mathbb{R}$ . (0,75 pt)
- Déterminer la primitive  $F$  de la fonction  $f(x) = 2x - \frac{3}{x^2}$  sur  $]0, +\infty[$  qui vérifie  $F(1) = 2$ . (1 pt)

## Logarithme, exponentielle et suite

---

**Exercice 2 (5 points).**

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :
  - l'équation  $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln 4$  ; (0,75 pt)
  - l'équation  $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$  ; (0,75 pt)
  - l'inéquation  $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$ . (1 pt)
- Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = e^{\sqrt{u_n}}$ .
  - Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n > 0$ . (0,5 pt)
  - On pose  $v_n = \ln(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1$ . (0,5 pt)
  - On pose  $w_n = v_n - 2$ . Montrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme, puis exprimer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$ . (1 pt)
  - Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . (0,5 pt)

## Fonction logarithme népérien

---

**Exercice 3 (5 points).** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$ , et  $(\mathcal{C})$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat. (0,5 pt)

2. Montrer que  $f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2}\right)$  pour tout  $x > 0$ , et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (0,75 pt)
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement le résultat. (0,75 pt)
4. Montrer que pour tout  $x > 0$  :  $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ . (1,25 pt)
5. En déduire que pour tout  $x > 0$  :  $2 \ln x \leq x^2 - 1$ . (0,5 pt)
6. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet exactement deux solutions dans  $]0, +\infty[$ , l'une dans  $]0, 1[$  et l'autre dans  $]1, 2[$ . (1,25 pt)

## Fonction exponentielle

**Exercice 4 (6 points).** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+2)e^{-x}$ , et  $(\mathcal{C})$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

1. (a) Montrer que  $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$  pour tout réel  $x$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat. (0,75 pt)  
(b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . (0,5 pt)
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement le résultat. (0,75 pt)
3. Montrer que pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ . (1,5 pt)
4. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0. (0,5 pt)
5. Étudier le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ , puis tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$ . (1 pt)
6. (a) Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = -(x+3)e^{-x}$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (0,5 pt)  
(b) En déduire la primitive  $G$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0. (0,5 pt)