

Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Semestre 1, devoir 2 : fonctions primitives, logarithme népérien et exponentielle

Fonctions primitives

Solution 1.

- Une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; par linéarité, $F_1(x) = x^3 - 2x^2 + x$ convient (on vérifie : $F_1'(x) = 3x^2 - 4x + 1$).
 - On pose $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$; alors $f_2(x) = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^3$, de la forme $u'u^n$ avec $n = 3$. Une primitive est $F_2(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2+1)^4}{8}$.
 - Le trinôme $x^2 + x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$ et un coefficient dominant positif : il est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2 + x + 3 > 0$, on a $u'(x) = 2x + 1$ et $f_3 = \frac{u'}{u}$: une primitive est $F_3(x) = \ln(x^2 + x + 3)$.
 - Avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$: $f_4(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$, de la forme $u'e^u$. Une primitive est $F_4(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.
- $f(x) = 2x - 3x^{-2}$. Une primitive de $2x$ est x^2 et une primitive de x^{-2} est $\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$; les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $F(x) = x^2 + \frac{3}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$. La condition $F(1) = 2$ donne $1 + 3 + c = 2$, soit $c = -2$. Donc $F(x) = x^2 + \frac{3}{x} - 2$.

Logarithme, exponentielle et suite

Solution 2.

- L'équation a un sens si $x - 1 > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 1$. Pour $x > 1$: $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln((x - 1)(x + 2))$, et comme $\ln$ est une bijection, l'équation équivaut à $(x - 1)(x + 2) = 4$, soit $x^2 + x - 6 = 0$, dont les racines sont 2 et -3 (somme -1, produit -6). Seule $x = 2$ vérifie $x > 1$. L'ensemble des solutions est $S = \{2\}$.
 - Pour $x > 0$, on pose $X = \ln x$: $X^2 - 3X + 2 = 0$ a pour racines $X = 1$ et $X = 2$ (somme 3, produit 2). Alors $\ln x = 1 \iff x = e$ et $\ln x = 2 \iff x = e^2$. Donc $S = \{e, e^2\}$.
 - On pose $X = e^x > 0$: $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, et l'inéquation devient $X^2 - 3X + 2 \leq 0$, soit $(X - 1)(X - 2) \leq 0$, soit $1 \leq X \leq 2$. Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$: $1 \leq e^x \leq 2 \iff \ln 1 \leq x \leq \ln 2 \iff 0 \leq x \leq \ln 2$. L'ensemble des solutions est $S = [0, \ln 2]$.
- Initialisation** : $u_0 = 1 > 0$. **Hérédité** : si $u_n > 0$, alors $\sqrt{u_n} > 0$ et $u_{n+1} = e\sqrt{u_n} > 0$ car $e > 0$. **Conclusion** : $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui justifie que $v_n = \ln(u_n)$ est bien défini.
 - $v_{n+1} = \ln(e\sqrt{u_n}) = \ln e + \ln(\sqrt{u_n}) = 1 + \ln(u_n^{\frac{1}{2}}) = 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) = \frac{1}{2}v_n + 1$.
 - $w_{n+1} = v_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}v_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}v_n - 1 = \frac{1}{2}(v_n - 2) = \frac{1}{2}w_n$: la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 2 = \ln(u_0) - 2 = \ln 1 - 2 = -2$. Donc $w_n = -2(\frac{1}{2})^n$, puis $v_n = w_n + 2 = 2 - 2(\frac{1}{2})^n$ et, comme $u_n = e^{v_n}$ (car $v_n = \ln u_n$) : $u_n = e^{2-2(\frac{1}{2})^n}$.

Vérification : $u_1 = e^{2-1} = e = e\sqrt{1}$.

(d) Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim v_n = 2$. La fonction exponentielle étant continue en 2, $\lim u_n = e^2$.

Fonction logarithme népérien

Solution 3.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 \ln x) = +\infty$, et $x^2 - 1 \rightarrow -1$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: l'axe des ordonnées (droite $x = 0$) est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
2. Pour $x > 0$: $x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x^2}\right) = x^2 - 1 - 2 \ln x = f(x)$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \rightarrow 0 \times 0 = 0$; et $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$. La parenthèse tend vers 1 et $x^2 \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. $\frac{f(x)}{x} = x - \frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x}$. Or $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, tandis que $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet donc une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$.
4. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions dérivables) et $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$. Sur $]0, +\infty[$, $x > 0$ et $x+1 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$: négatif sur $]0, 1[$, positif sur $]1, +\infty[$. f est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$; elle admet un minimum en 1 égal à $f(1) = 1 - 1 - 2 \ln 1 = 0$. Les limites aux bornes valent $+\infty$.
5. D'après le tableau de variations, $f(x) \geq f(1) = 0$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 1 - 2 \ln x \geq 0$, soit $2 \ln x \leq x^2 - 1$ (avec égalité seulement pour $x = 1$).
6. Sur $]0, 1[$: f est continue et strictement décroissante, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 0$; elle réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$. Comme $1 \in]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0, 1[$, et cette solution n'est pas 1 car $f(1) = 0 \neq 1$: elle est dans $]0, 1[$. Sur $]1, +\infty[$: f est continue et strictement croissante, avec $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$. De plus $f(1) = 0 < 1$ et $f(2) = 4 - 1 - 2 \ln 2 = 3 - 2 \ln 2 \approx 1,61 > 1$; par le théorème des valeurs intermédiaires, cette solution est dans $]1, 2[$. Conclusion : l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$, l'une dans $]0, 1[$ et l'autre dans $]1, 2[$.

Fonction exponentielle

Solution 4.

1. (a) $f(x) = (x+2)e^{-x} = \frac{x+2}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$; et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ car $e^x \rightarrow +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses (droite $y = 0$) est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ (car $-x \rightarrow +\infty$). Par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour $x \neq 0$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2}{x} \times e^{-x} = \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{-x}$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $1 + \frac{2}{x} \rightarrow 1$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $u(x) = x + 2$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$: $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x + 2)(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x - 2) = -(x + 1)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-(x + 1)$: positif sur $] -\infty, -1]$, négatif sur $[-1, +\infty[$. f est donc strictement croissante sur $] -\infty, -1]$ et strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$, avec un maximum $f(-1) = 1 \times e^1 = e$; $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0$.
4. $f(0) = 2e^0 = 2$ et $f'(0) = -1 \times e^0 = -1$. $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x + 2$.
5. Comme $e^{-x} > 0$, $f(x)$ est du signe de $x + 2$: $f(x) < 0$ pour $x < -2$, $f(-2) = 0$ et $f(x) > 0$ pour $x > -2$. Tracé : $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en $(-2, 0)$, monte jusqu'au maximum $(-1, e)$ (avec $e \approx 2,72$), passe par $(0, 2)$ où elle est tangente à (T) , puis décroît vers l'axe des abscisses en restant au-dessus ; à gauche de -2 elle plonge vers $-\infty$. Points utiles : $f(1) = \frac{3}{e} \approx 1,10$, $f(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0,54$, $f(-3) = -e^3 \approx -20$.
6. (a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par la formule du produit : $F'(x) = -1 \times e^{-x} + (-(x + 3)) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(-1 + x + 3) = (x + 2)e^{-x} = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
(b) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $G = F + c$, $c \in \mathbb{R}$. $G(0) = 0 \iff F(0) + c = 0 \iff -3 + c = 0 \iff c = 3$. Donc $G(x) = 3 - (x + 3)e^{-x}$.