

Devoir surveillé n°1 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 1 : limites et continuité, dérivation et suites numériques

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 4 + 6 + 5 + 5 points.

Limites et continuité

Exercice 1 (4 points). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4}$. (0,75 pt)
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$. (0,75 pt)
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$. (0,75 pt)
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$. (0,75 pt)
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \cos x}{x + 1}$ (on pourra utiliser un encadrement). (1 pt)

Continuité et théorèmes fondamentaux

Exercice 2 (6 points).

1. Soit h la fonction définie sur $[-3, 1[\cup]1, +\infty[$ par $h(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.
Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ et en déduire que h est prolongeable par continuité en 1 ; préciser la valeur du prolongement en 1. (1,5 pt)
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 2x - 5$.
 - (a) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
 - (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, puis montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. (0,75 pt)
 - (c) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis montrer que $1 < \alpha < 2$. (1 pt)
 - (d) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} . (0,75 pt)
 - (e) Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, qu'il existe un réel $c \in]1, 2[$ tel que $g'(c) = 9$, puis déterminer la valeur exacte de c . (1,5 pt)

Étude d'une fonction

Exercice 3 (5 points). Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Montrer que pour tout $x \in D_f : f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$. (0,75 pt)
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement les limites en 1. (1 pt)
3. Montrer que la droite $(D) : y = x - 2$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D) . (1 pt)
4. Montrer que pour tout $x \in D_f : f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f . (1,25 pt)
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3. (0,5 pt)
6. Tracer (D) , (T) et $(\mathcal{C})$. (0,5 pt)

Suites numériques

Exercice 4 (5 points). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 4$. (1 pt)
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1}^2 - u_n^2 = (4 - u_n)(u_n + 1)$. (0,5 pt)
(b) En déduire que la suite (u_n) est croissante. (0,5 pt)
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. (1 pt)
5. On pose $v_n = 4 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{3v_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$, puis que $0 \leq v_{n+1} \leq \frac{3}{4}v_n$. (0,75 pt)
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq v_n \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$, et retrouver la limite de (u_n) . (0,75 pt)