

Devoir surveillé n°1 : Corrigé

Semestre 1, devoir 1 : limites et continuité, dérivation et suites numériques

Limites et continuité

Solution 1.

- Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par le terme dominant : $\frac{3x^2-2x+1}{x^2+4} = \frac{x^2(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}$. Comme $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{4}{x^2}$ tendent vers 0, la limite vaut $\frac{3}{1}$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^2+4} = 3$.
- Forme indéterminée $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée : pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$. Or $\sqrt{x^2+4x} = x\sqrt{1+\frac{4}{x}}$ pour $x > 0$, donc $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{4x}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1)} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$. Comme $\frac{4}{x} \rightarrow 0$, $\sqrt{1+\frac{4}{x}} \rightarrow 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x} - x) = \frac{4}{2} = 2$.
- On sait que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{2}$. On pose $u = 2x$, qui tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$: $\frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 4 \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} = 4 \frac{1-\cos u}{u^2} \rightarrow 4 \times \frac{1}{2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 2$.
- Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ (numérateur et dénominateur s'annulent en 1). On factorise par $(x-1)$: $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ et $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Pour $x \neq 1$: $\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{x+2}{x+1} \rightarrow \frac{3}{2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$.
- Pour tout x , $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $3x-1 \leq 3x-\cos x \leq 3x+1$. Pour $x > 0$, $x+1 > 0$ et l'on peut diviser : $\frac{3x-1}{x+1} \leq \frac{3x-\cos x}{x+1} \leq \frac{3x+1}{x+1}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$ (termes dominants). D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-\cos x}{x+1} = 3$.

Continuité et théorèmes fondamentaux

Solution 2.

- En 1, le numérateur $\sqrt{x+3}-2$ et le dénominateur $x-1$ tendent vers 0 : forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On multiplie par la quantité conjuguée du numérateur ; pour $x \in [-3, 1[\cup]1, +\infty[$: $h(x) = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$. La fonction h n'est pas définie en 1 mais admet une limite finie en 1 : elle est prolongeable par continuité en 1, et le prolongement $\tilde{h}$ est défini par $\tilde{h}(x) = h(x)$ si $x \neq 1$ et $\tilde{h}(1) = \frac{1}{4}$.
- (a) g est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = 3x^2 + 2$. Comme $3x^2 \geq 0$, on a $g'(x) \geq 2 > 0$ pour tout réel x : g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
(b) En $\pm\infty$, un polynôme a la limite de son terme de plus haut degré : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. La fonction g est continue (polynôme) et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$; d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} g, \lim_{+\infty} g[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
(c) Comme g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, le réel 0 admet un unique antécédent : l'équation

$g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. De plus $g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 < 0$ et $g(2) = 8 + 4 - 5 = 7 > 0$: g étant continue sur $[1, 2]$ et $g(1) \times g(2) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que g s'annule dans $]1, 2[$; par unicité, $1 < \alpha < 2$.

(d) $g(1,3) = 2,197 + 2,6 - 5 = -0,203 < 0$ et $g(1,4) = 2,744 + 2,8 - 5 = 0,544 > 0$. Comme g est strictement croissante, $1,3 < \alpha < 1,4$.

(e) g est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$ (polynôme). D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $g(2) - g(1) = g'(c)(2 - 1)$, c'est-à-dire $g'(c) = 7 - (-2) = 9$. On résout : $g'(c) = 9 \iff 3c^2 + 2 = 9 \iff c^2 = \frac{7}{3} \iff c = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$. Comme $c \in]1, 2[$, on garde $c = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1,53$, qui appartient bien à $]1, 2[$ car $1 < \frac{7}{3} < 4$.

Étude d'une fonction

Solution 3.

- Pour $x \neq 1$: $x - 2 + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-2)(x-1)+1}{x-1} = \frac{x^2-3x+2+1}{x-1} = \frac{x^2-3x+3}{x-1} = f(x)$.
- En $\pm\infty$, $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ donc $f(x)$ a la limite de $x - 2$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. En 1 : le numérateur $x^2 - 3x + 3$ tend vers $1 > 0$ et $x - 1 \rightarrow 0$. Si $x \rightarrow 1^-$, $x - 1 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; si $x \rightarrow 1^+$, $x - 1 > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Interprétation : la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
- $f(x) - (x - 2) = \frac{1}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$: la droite $(D) : y = x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Position relative : $f(x) - (x - 2) = \frac{1}{x-1}$ est du signe de $x - 1$. Donc sur $]1, +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D) ; sur $] - \infty, 1[$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de (D) .
- f est dérivable sur D_f (fonction rationnelle) et, avec l'écriture de la question 1 : $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-1)(x-1+1)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Le dénominateur $(x-1)^2$ est strictement positif sur D_f , donc $f'(x)$ est du signe de $x(x-2)$: positif sur $] - \infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$, négatif sur $[0, 1[$ et sur $]1, 2]$. Avec $f(0) = \frac{3}{-1} = -3$ et $f(2) = \frac{4-6+3}{1} = 1$: f est croissante sur $] - \infty, 0]$, décroissante sur $[0, 1[$ (de -3 vers $-\infty$), décroissante sur $]1, 2]$ (de $+\infty$ vers 1) et croissante sur $[2, +\infty[$. Elle admet un maximum local $f(0) = -3$ et un minimum local $f(2) = 1$.
- $f(3) = \frac{9-9+3}{2} = \frac{3}{2}$ et $f'(3) = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4}$. $(T) : y = f'(3)(x - 3) + f(3) = \frac{3}{4}(x - 3) + \frac{3}{2}$, soit $(T) : y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.
- Tracé : on place l'asymptote verticale $x = 1$, la droite $(D) : y = x - 2$, la tangente (T) passant par $(1, 0)$ et $(3, \frac{3}{2})$, les points $(0, -3)$ (maximum local) et $(2, 1)$ (minimum local). La branche de gauche monte jusqu'à $(0, -3)$ puis plonge vers $-\infty$ en restant sous (D) ; la branche de droite descend de $+\infty$ jusqu'à $(2, 1)$ puis remonte en restant au-dessus de (D) et en s'en rapprochant.

Suites numériques

Solution 4.

- $u_1 = \sqrt{3 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$ et $u_2 = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10} \approx 3,16$.

2. **Initialisation** : $u_0 = 0 \in [0, 4]$. **Hérédité** : supposons $0 \leq u_n \leq 4$ pour un entier n . Alors $4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$, et la fonction racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$: $2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.
3. (a) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 3u_n + 4 - u_n^2 = -(u_n^2 - 3u_n - 4)$. Or $u_n^2 - 3u_n - 4 = (u_n - 4)(u_n + 1)$ (racines 4 et -1), donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 = -(u_n - 4)(u_n + 1) = (4 - u_n)(u_n + 1)$.
 (b) D'après la question 2, $4 - u_n \geq 0$ et $u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 0$, soit $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$. Comme u_n et u_{n+1} sont positifs et que la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.
4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 4 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 4]$. La fonction $f : x \rightarrow \sqrt{3x + 4}$ est continue sur $[0, 4]$, donc ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$: $\sqrt{3\ell + 4} = \ell$, d'où (avec $\ell \geq 0$) $3\ell + 4 = \ell^2$, soit $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, dont les racines sont 4 et -1 . Comme $\ell \in [0, 4]$: $\lim u_n = 4$.
5. (a) $v_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \frac{(4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{16 - (3u_n + 4)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{12 - 3u_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3v_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$.
 Comme $\sqrt{3u_n + 4} \geq 0$, on a $4 + \sqrt{3u_n + 4} \geq 4$, donc $0 \leq \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{4}$; en multipliant par $3v_n \geq 0$ (car $u_n \leq 4$) : $0 \leq v_{n+1} \leq \frac{3}{4}v_n$.
 (b) Par récurrence : $v_0 = 4 - 0 = 4 = 4(\frac{3}{4})^0$, l'encadrement est vrai au rang 0. Si $0 \leq v_n \leq 4(\frac{3}{4})^n$, alors d'après (a) $0 \leq v_{n+1} \leq \frac{3}{4}v_n \leq \frac{3}{4} \times 4(\frac{3}{4})^n = 4(\frac{3}{4})^{n+1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 4(\frac{3}{4})^n$. Comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim (\frac{3}{4})^n = 0$, et le théorème des gendarmes donne $\lim v_n = 0$, c'est-à-dire $\lim(4 - u_n) = 0$: on retrouve $\lim u_n = 4$.