

Devoir surveillé n°4 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 2 : dénombrement, arithmétique, géométrie dans l'espace

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 5 + 6 + 9 points. Toute réponse doit être justifiée.

Dénombrement

Exercice 1 (5 points). Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 boules rouges, 3 boules vertes et 3 boules blanches.

1. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
 - (a) Déterminer le nombre de tirages possibles. (0,5 pt)
 - (b) Déterminer le nombre de tirages contenant trois boules rouges. (0,5 pt)
 - (c) Déterminer le nombre de tirages contenant exactement une boule rouge. (0,5 pt)
 - (d) Déterminer le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge. (0,5 pt)
 - (e) Déterminer le nombre de tirages contenant trois boules de couleurs différentes. (0,5 pt)
2. Déterminer le coefficient de x^5 dans le développement de $(2x - 1)^8$. (1 pt)
3. Soit n un entier naturel non nul.
 - (a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$. (1 pt)

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 2 (6 points).

1. Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. (1 pt)
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2026} par 7. (1 pt)
3. (a) Calculer PGCD(1078, 322) à l'aide de l'algorithme d'Euclide. (1 pt)
(b) En déduire un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $77u + 23v = 1$. (1 pt)
(c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $77x + 23y = 1$. (1 pt)
4. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n + 3$ divise $2n + 1$. (1 pt)

Géométrie dans l'espace

Exercice 3 (9 points). L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 2; 0)$, $B(2; 4; 2)$, $C(3; 0; 1)$ et $D(3; 3; 4)$.

1. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A . (1 pt)
(b) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire l'aire du triangle ABC . (1,5 pt)
2. Montrer que $2x + y - 2z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) . (1 pt)
3. (a) Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (ABC) et calculer la distance $d(D, (ABC))$. (1 pt)
(b) En déduire le volume V du tétraèdre $ABCD$. (0,5 pt)
4. Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 2z + 1 = 0$.
(a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R . (1 pt)
(b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC) , puis déterminer les coordonnées du point H , intersection de (Δ) et de (ABC) . (1 pt)
(c) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon. (1 pt)
5. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans parallèles au plan (ABC) et tangents à la sphère (S) . (1 pt)