

Devoir surveillé n°4 : Corrigé

Semestre 2, devoir 2 : dénombrement, arithmétique, géométrie dans l'espace

Dénombrement

Solution 1.

- Un tirage simultané de 3 boules parmi 10 est une combinaison de 3 éléments parmi 10 (l'ordre n'intervient pas, pas de répétition).
 - Nombre de tirages : $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$.
 - Trois boules rouges parmi les 4 rouges : $\binom{4}{3} = 4$ tirages.
 - Exactement une rouge : on choisit 1 rouge parmi 4 et 2 boules parmi les 6 non rouges (principe multiplicatif) : $\binom{4}{1} \times \binom{6}{2} = 4 \times 15 = 60$ tirages.
 - Au moins une rouge : on passe par le contraire « aucune rouge », soit 3 boules parmi les 6 non rouges : $\binom{6}{3} = 20$ tirages. Donc $120 - 20 = 100$ tirages contiennent au moins une boule rouge.
 - Trois couleurs différentes : une rouge, une verte et une blanche, soit $\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 3 \times 3 = 36$ tirages.
- Formule du binôme de Newton : $(2x - 1)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (2x)^{8-k} (-1)^k$. Le terme en x^5 correspond à $8 - k = 5$, soit $k = 3$:

$$\binom{8}{3} (2x)^5 (-1)^3 = -56 \times 32x^5 = -1792x^5.$$

Le coefficient de x^5 est -1792 .

- (a) Pour $1 \leq k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1},$$

car $k! = k \cdot (k-1)!$, $n! = n \cdot (n-1)!$ et $n - k = (n-1) - (k-1)$.

- Le terme d'indice $k = 0$ est nul, donc, en utilisant (a) puis le changement d'indice $j = k - 1$:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \cdot 2^{n-1},$$

d'après la formule $\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} = 2^m$ (binôme de Newton avec $a = b = 1$) appliquée à $m = n - 1$.

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Solution 2.

1. On raisonne modulo 7. Comme $9 = 7 + 2$, on a $9 \equiv 2[7]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9^n \equiv 2^n[7]$ (compatibilité des congruences avec les puissances). Ainsi

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3 \times 9^n + 4 \times 2^n \equiv 3 \times 2^n + 4 \times 2^n = 7 \times 2^n \equiv 0[7].$$

Donc 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout entier naturel n . (Contrôle : $n = 0$ donne $3 + 4 = 7$; $n = 1$ donne $27 + 8 = 35 = 7 \times 5$.)

2. $2^3 = 8 \equiv 1[7]$. Division euclidienne de 2026 par 3 : $2026 = 3 \times 675 + 1$. Donc

$$2^{2026} = (2^3)^{675} \times 2 \equiv 1^{675} \times 2 = 2[7].$$

Comme $0 \leq 2 < 7$, le reste de la division euclidienne de 2^{2026} par 7 est 2.

3. (a) Algorithme d'Euclide :

$$1078 = 3 \times 322 + 112, \quad 322 = 2 \times 112 + 98, \quad 112 = 1 \times 98 + 14, \quad 98 = 7 \times 14 + 0.$$

Le dernier reste non nul est 14 : $\text{PGCD}(1078, 322) = 14$.

(b) $1078 = 14 \times 77$ et $322 = 14 \times 23$, donc $\text{PGCD}(77, 23) = \frac{14}{14} = 1$: 77 et 23 sont premiers entre eux et l'identité de Bézout garantit l'existence de (u, v) . En divisant par 14 les égalités de (a) on obtient l'algorithme d'Euclide pour 77 et 23 :

$$77 = 3 \times 23 + 8, \quad 23 = 2 \times 8 + 7, \quad 8 = 1 \times 7 + 1.$$

En remontant : $1 = 8 - 7 = 8 - (23 - 2 \times 8) = 3 \times 8 - 23 = 3(77 - 3 \times 23) - 23 = 3 \times 77 - 10 \times 23$.

Le couple $(u, v) = (3, -10)$ convient : $77 \times 3 + 23 \times (-10) = 231 - 230 = 1$.

(c) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Comme $77 \times 3 + 23 \times (-10) = 1$:

$$77x + 23y = 1 \iff 77x + 23y = 77 \times 3 + 23 \times (-10) \iff 77(x - 3) = -23(y + 10).$$

Si (x, y) est solution, alors 23 divise $77(x - 3)$; comme 23 est premier avec 77, le théorème de Gauss donne $23 \mid (x - 3)$, soit $x = 3 + 23k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En reportant : $77 \times 23k = -23(y + 10)$, d'où $y = -10 - 77k$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $77(3 + 23k) + 23(-10 - 77k) = 231 + 1771k - 230 - 1771k = 1$.

L'ensemble des solutions est $S = \{(3 + 23k, -10 - 77k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $2n + 1 = 2(n + 3) - 5$. Si $(n + 3) \mid (2n + 1)$, comme $(n + 3) \mid 2(n + 3)$, alors $n + 3$ divise la différence $2(n + 3) - (2n + 1) = 5$. Les diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5, et $n + 3 \geq 3$, donc $n + 3 = 5$, soit $n = 2$.

Réciproquement, pour $n = 2$: $n + 3 = 5$ et $2n + 1 = 5$, et $5 \mid 5$.

Conclusion : le seul entier naturel qui convient est $n = 2$.

Géométrie dans l'espace

Solution 3.

1. (a) $\overrightarrow{AB}(1; 2; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -2; 1)$. Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 4 + 2 = 0$, donc $(AB) \perp (AC)$: le triangle est rectangle en A . De plus $AB = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ et $AC = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. Le triangle ABC est **rectangle et isocèle en A** .
 (b) Par l'expression analytique du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2 \times 1 - 2 \times (-2); 2 \times 2 - 1 \times 1; 1 \times (-2) - 2 \times 2) = (6; 3; -6).$$

- L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 9 + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{81} = \frac{9}{2}$. (Contrôle : triangle rectangle en A , aire $= \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{9}{2}$.)
 2. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6; 3; -6) = 3(2; 1; -2)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, qui ne sont pas colinéaires : $\vec{n}(2; 1; -2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) . Ce plan a donc une équation de la forme $2x + y - 2z + d = 0$; comme $A(1; 2; 0)$ lui appartient, $2 + 2 + d = 0$ et $d = -4$. Ainsi $(ABC) : 2x + y - 2z - 4 = 0$. (Vérification : B donne $4 + 4 - 4 - 4 = 0$ et C donne $6 + 0 - 2 - 4 = 0$.)
 3. (a) Pour $D(3; 3; 4) : 2 \times 3 + 3 - 2 \times 4 - 4 = -3 \neq 0$, donc $D \notin (ABC)$. Distance d'un point à un plan :

$$d(D, (ABC)) = \frac{|2 \times 3 + 3 - 2 \times 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1.$$

(b) La hauteur issue de D dans le tétraèdre $ABCD$ est $d(D, (ABC)) = 1$ et la base ABC a pour aire $\frac{9}{2}$. Donc

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times 1 = \frac{3}{2}.$$

(Contrôle par le produit mixte : $\overrightarrow{AD}(2; 1; 4)$ et $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 12 + 3 - 24 = -9$, d'où $V = \frac{|-9|}{6} = \frac{3}{2}$.)

4. (a) En écrivant les formes canoniques :

$$x^2 - 8x + y^2 - 6y + z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + (z + 1)^2 - 1 + 1 = 0,$$

soit $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 25$. Donc (S) est la **sphère de centre $\Omega(4; 3; -1)$ et de rayon $R = 5$** .

(b) (Δ) passe par Ω et a pour vecteur directeur le vecteur normal $\vec{n}(2; 1; -2)$ de (ABC) :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Le point de paramètre t appartient à (ABC) si et seulement si $2(4 + 2t) + (3 + t) - 2(-1 - 2t) - 4 = 0$, soit $9t + 9 = 0$, c'est-à-dire $t = -1$. D'où $H(2; 2; 1)$. (Vérification : $4 + 2 - 2 - 4 = 0$.)

(c) H est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC) et $\Omega H = \sqrt{(2 - 4)^2 + (2 - 3)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$, ce qui est bien $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|8 + 3 + 2 - 4|}{3} = 3$. Comme $\Omega H = 3 < R = 5$, le plan coupe la sphère. Précisément, pour tout point M du plan (ABC) , $(\Omega H) \perp (HM)$, donc par le théorème de Pythagore $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = 9 + HM^2$, et

$$M \in (S) \Leftrightarrow \Omega M^2 = 25 \Leftrightarrow HM^2 = 16 \Leftrightarrow HM = 4.$$

L'intersection de (S) et de (ABC) est donc le **cercle du plan (ABC) de centre $H(2; 2; 1)$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - \Omega H^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$** .

5. Un plan (P) parallèle à (ABC) admet $\vec{n}(2; 1; -2)$ pour vecteur normal, donc une équation de la forme $2x + y - 2z + k = 0$ avec $k \in \mathbb{R}$. Il est tangent à (S) si et seulement si $d(\Omega, (P)) = R$, c'est-à-dire

$$\frac{|2 \times 4 + 3 - 2 \times (-1) + k|}{3} = 5 \iff |13 + k| = 15 \iff k = 2 \text{ ou } k = -28.$$

Il y a donc deux plans parallèles à (ABC) et tangents à (S) :

$$(P_1) : 2x + y - 2z + 2 = 0 \quad \text{et} \quad (P_2) : 2x + y - 2z - 28 = 0.$$

(Les points de contact sont $\Omega \mp \frac{5}{3}\vec{n}$, soit $(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3})$ pour (P_1) et $(\frac{22}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{13}{3})$ pour (P_2) .)