

Devoir surveillé n°3 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 1 : limites, dérivation, étude de fonctions, vecteurs de l'espace

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 4 + 5 + 7 + 4 points. Toute réponse doit être justifiée.

Limites

Exercice 1 (4 points). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$; (1 pt)
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$; (1 pt)
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$; (1 pt)
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x+1}$. (1 pt)

Dérivation

Exercice 2 (5 points).

1. Soit f la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+1}$.
 - (a) En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 4 et calculer $f'(4)$. (1 pt)
 - (b) Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. (0,5 pt)
2. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'ensemble indiqué :
 - (a) $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$; (0,5 pt)
 - (b) $h(x) = \cos^3(2x)$ sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
3. (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x - \sin x$. Étudier les variations de φ sur $[0, +\infty[$ et en déduire que pour tout $x \geq 0$: $\sin x \leq x$. (1 pt)
 - (b) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. (1 pt)
 - (c) En déduire que pour tout $x \geq 0$: $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$. (0,5 pt)

Étude d'une fonction

Exercice 3 (7 points). Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 1},$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
Interpréter graphiquement les limites en 1. (1,5 pt)
2. (a) Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$.
(b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$,
puis étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ) . (1,5 pt)
3. Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f .
(1,5 pt)
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3. (0,5 pt)
5. Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f(2-x) + f(x) = 2$. Interpréter graphiquement ce résultat.
(1 pt)
6. Tracer (Δ) , l'asymptote verticale et la courbe $(\mathcal{C})$. (0,5 pt)
7. Soit m un réel. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de
l'équation $f(x) = m$. (0,5 pt)

Vecteurs de l'espace

Exercice 4 (4 points). L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; 4; 2)$ et $D(3; 3; -2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés. (0,5 pt)
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A . (1 pt)
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. (0,5 pt)
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires (on pourra raisonner par l'absurde). Que peut-on en déduire ? (1 pt)
5. Soit $\vec{w}(5; 1; 1)$. Déterminer les réels a , b et c tels que $\vec{w} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}$. (1 pt)