

# Devoir surveillé n°3 : Corrigé

Semestre 2, devoir 1 : limites, dérivation, étude de fonctions, vecteurs de l'espace

## Limites

### Solution 1.

1. C'est une forme indéterminée «  $\infty - \infty$  ». On multiplie par la quantité conjuguée : pour  $x > 0$ ,

$$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x},$$

puis  $\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{x\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + x} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1}$ , car  $\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{x^2(1 + \frac{3}{x})} = x\sqrt{1 + \frac{3}{x}}$  pour  $x > 0$ .  
Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ , on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$ .

2. C'est une forme indéterminée «  $\frac{0}{0}$  ». On factorise :  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$  et  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ . Pour  $x \neq 2$  :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{x - 3}{x + 2} \rightarrow \frac{2 - 3}{2 + 2} = -\frac{1}{4} \quad \text{quand } x \rightarrow 2.$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = -\frac{1}{4}$ .

3. Forme indéterminée «  $\frac{0}{0}$  ». Pour  $x \neq 1$ , avec la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = 2$ , on obtient  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$ .

4. Pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , donc pour  $x > -1$  :

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq \frac{2x + \cos x}{x + 1} \leq \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2$  et de même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$ . Par le théorème des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x+1} = 2$ .

## Dérivation

### Solution 2.

1. (a)  $f(4) = \sqrt{9} = 3$ . Pour  $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ ,  $x \neq 4$ , en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4} = \frac{(2x+1) - 9}{(x-4)(\sqrt{2x+1} + 3)} = \frac{2}{\sqrt{2x+1} + 3}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$ , ce taux d'accroissement a pour limite  $\frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$ , qui est finie. Donc  $f$  est dérivable en 4 et  $f'(4) = \frac{1}{3}$ .

(b) La tangente au point d'abscisse 4 a pour équation  $y = f'(4)(x - 4) + f(4) = \frac{1}{3}(x - 4) + 3$ , soit

$$(T) : y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

2. (a)  $g = \frac{u}{v}$  avec  $u(x) = x^2 - 1$ ,  $v(x) = x^2 + 1 > 0$ ,  $u'(x) = v'(x) = 2x$  :

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

(b)  $h = w^3$  avec  $w(x) = \cos(2x)$  et  $w'(x) = -2\sin(2x)$  (dérivée d'une composée). Donc  $h'(x) = 3w^2w' = -6\sin(2x)\cos^2(2x)$ .

3. (a)  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\varphi'(x) = 1 - \cos x$ . Comme  $\cos x \leq 1$ ,  $\varphi'(x) \geq 0$  pour tout réel  $x$  (avec égalité seulement aux points  $x = 2k\pi$ ) :  $\varphi$  est **croissante sur  $[0, +\infty[$** . Donc pour tout  $x \geq 0$ ,  $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0 - \sin 0 = 0$ , c'est-à-dire  $x - \sin x \geq 0$  :  $\sin x \leq x$ .  
 (b)  $\psi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\psi'(x) = -\sin x + x = \varphi(x)$ . D'après (a),  $\psi'(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ , donc  $\psi$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  et, pour  $x \geq 0$ ,  $\psi(x) \geq \psi(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 0$ . Ainsi  $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$ , soit  $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$  pour tout  $x \geq 0$ .  
 (c) Soit  $m(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$  ;  $m$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $m'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \psi(x) \geq 0$  pour  $x \geq 0$  d'après (b). Donc  $m$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  et  $m(x) \geq m(0) = 0$  pour tout  $x \geq 0$  :  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ .

## Étude d'une fonction

### Solution 3.

1.  $f(x)$  existe si et seulement si  $x - 1 \neq 0$  :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

**En  $\pm\infty$ .** Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{x^2(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{x})} = x \cdot \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$ . Le second facteur tend vers 2, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**En 1.** Le numérateur tend vers  $2 - 3 + 3 = 2 > 0$  et le dénominateur  $x - 1$  tend vers 0 :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  (car  $x - 1 > 0$ ) et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  (car  $x - 1 < 0$ ). La droite d'équation  $x = 1$  est **asymptote verticale** à  $(\mathcal{C})$ .

2. (a) Pour  $x \neq 1$  :  $2x - 1 + \frac{2}{x-1} = \frac{(2x-1)(x-1)+2}{x-1} = \frac{2x^2-3x+1+2}{x-1} = \frac{2x^2-3x+3}{x-1} = f(x)$ .

(b)  $f(x) - (2x - 1) = \frac{2}{x-1}$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ , donc  $(\Delta) : y = 2x - 1$  est **asymptote oblique** à  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

Le signe de  $f(x) - (2x - 1) = \frac{2}{x-1}$  est celui de  $x - 1$  : sur  $]1, +\infty[$ ,  $f(x) > 2x - 1$  et  $(\mathcal{C})$  est **au-dessus** de  $(\Delta)$  ; sur  $] -\infty, 1[$ ,  $f(x) < 2x - 1$  et  $(\mathcal{C})$  est **en dessous** de  $(\Delta)$ .

3.  $f$  est dérivable sur  $D_f$  (fonction rationnelle) et, avec l'écriture de la question 2 :

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2} = \frac{2(x^2 - 2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Comme  $(x-1)^2 > 0$  sur  $D_f$ ,  $f'(x)$  a le signe de  $2x(x-2)$  : positif sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]2, +\infty[$ , négatif sur  $]0, 1[$  et sur  $]1, 2[$ , nul en 0 et en 2. Avec  $f(0) = -3$  et  $f(2) = 4 - 1 + 2 = 5$  :

|         |           |            |    |            |           |  |           |            |   |            |           |
|---------|-----------|------------|----|------------|-----------|--|-----------|------------|---|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |            | 0  |            | 1         |  |           |            | 2 |            | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +          | 0  | -          |           |  |           | -          | 0 | +          |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | -3 | $\searrow$ | $-\infty$ |  | $+\infty$ | $\searrow$ | 5 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f$  est croissante sur  $] -\infty, 0]$ , décroissante sur  $[0, 1[$  et sur  $]1, 2]$ , croissante sur  $[2, +\infty[$  ; -3 est un maximum local (atteint en 0) et 5 un minimum local (atteint en 2).

4.  $f(3) = 6 - 1 + \frac{2}{2} = 6$  et  $f'(3) = \frac{2 \times 3 \times 1}{2^2} = \frac{3}{2}$ . Donc

$$(T) : y = \frac{3}{2}(x-3) + 6 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}.$$

5. Pour  $x \in D_f$ , on a  $2-x \neq 1$ , donc  $2-x \in D_f$ , et

$$f(2-x) + f(x) = \left[ 2(2-x) - 1 + \frac{2}{1-x} \right] + \left[ 2x - 1 + \frac{2}{x-1} \right],$$

soit  $f(2-x) + f(x) = (3-2x) + (2x-1) + \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-x} = 2$ . Ainsi, si  $M(x; f(x))$  est un point de  $(\mathcal{C})$ , le point  $M'(2-x; 2-f(x))$ , symétrique de  $M$  par rapport au point  $I(1; 1)$ , vérifie  $2-f(x) = f(2-x)$  : il appartient aussi à  $(\mathcal{C})$ . Le point  $I(1; 1)$ , intersection des deux asymptotes, est un **centre de symétrie** de  $(\mathcal{C})$ .

6. Tracé : on place les asymptotes  $x = 1$  et  $(\Delta) : y = 2x - 1$ , le centre de symétrie  $I(1; 1)$ , les points  $(0; -3)$  et  $(2; 5)$  à tangente horizontale, le point  $(3; 6)$  et sa tangente  $(T)$ , puis on respecte les variations et les positions relatives.

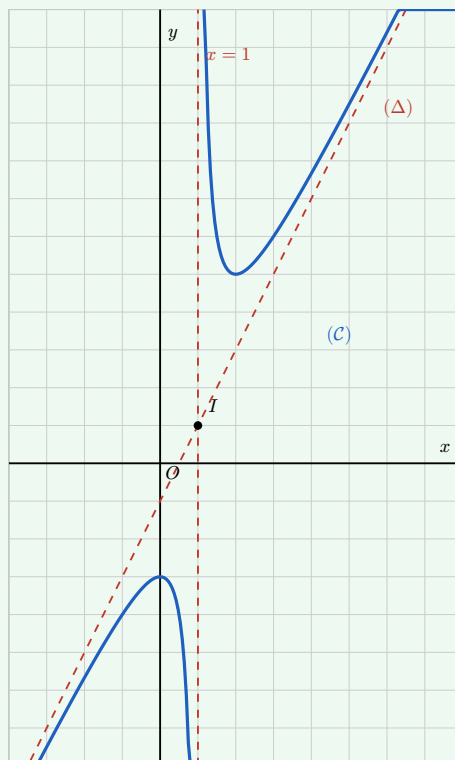


Fig. 1. – Courbe  $(\mathcal{C})$ , asymptotes et centre de symétrie  $I(1; 1)$  (0,5 cm par unité).

7. Les solutions de  $f(x) = m$  sont les abscisses des points d'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec la droite horizontale  $y = m$ . D'après le tableau de variations et le tracé :
- si  $m < -3$  : **deux solutions** (toutes deux dans  $] -\infty, 1[$ ) ;
  - si  $m = -3$  : **une solution** ( $x = 0$ ) ;
  - si  $-3 < m < 5$  : **aucune solution** ;
  - si  $m = 5$  : **une solution** ( $x = 2$ ) ;
  - si  $m > 5$  : **deux solutions** (toutes deux dans  $]1, +\infty[$ ).

## Vecteurs de l'espace

### Solution 4.

1.  $\overrightarrow{AB}(3-1; 0-2; 1-0) = (2; -2; 1)$  et  $\overrightarrow{AC}(2-1; 4-2; 2-0) = (1; 2; 2)$ . Les coordonnées ne sont pas proportionnelles ( $\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{2}$ ), donc  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires : les points  $A, B, C$  **ne sont pas alignés**.
2.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + (-2) \times 2 + 1 \times 2 = 2 - 4 + 2 = 0$ , donc  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$  : le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ . De plus  $AB = \sqrt{4+4+1} = 3$  et  $AC = \sqrt{1+4+4} = 3$ , donc  $AB = AC$ . Le triangle  $ABC$  est **rectangle et isocèle en A**. (Contrôle :  $\overrightarrow{BC}(-1; 4; 1)$  et  $BC^2 = 18 = AB^2 + AC^2$ .)
3.  $\overrightarrow{AD}(3-1; 3-2; -2-0) = (2; 1; -2)$ . Alors  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 2 - 2 = 0$  et  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 + 2 - 4 = 0$  :  $\overrightarrow{AD}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  et à  $\overrightarrow{AC}$ .
4. Supposons par l'absurde que  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  soient coplanaires. Comme  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires, il existerait des réels  $\alpha, \beta$  tels que  $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ . En prenant le produit scalaire avec  $\overrightarrow{AD}$  et en utilisant la question 3 :

$$\|\overrightarrow{AD}\|^2 = \alpha(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) + \beta(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = 0.$$

Or  $\|\overrightarrow{AD}\|^2 = 4 + 1 + 4 = 9 \neq 0$  : contradiction. Donc les trois vecteurs **ne sont pas coplanaires** ; on en déduit que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  est une **base de l'espace** (et même une base orthogonale, dont les trois vecteurs ont pour norme 3), et que  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  est un repère de l'espace.

5. Supposons  $\vec{w} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}$ . Les trois vecteurs de la base étant deux à deux orthogonaux et de norme 3, le produit scalaire de cette égalité par  $\overrightarrow{AB}$  donne  $\vec{w} \cdot \overrightarrow{AB} = a\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 9a$ . Or  $\vec{w} \cdot \overrightarrow{AB} = 10 - 2 + 1 = 9$ , donc  $a = 1$ . De même  $\vec{w} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 + 2 + 2 = 9 = 9b$  donne  $b = 1$ , et  $\vec{w} \cdot \overrightarrow{AD} = 10 + 1 - 2 = 9 = 9c$  donne  $c = 1$ .  
Vérification :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (2+1+2; -2+2+1; 1+2-2) = (5; 1; 1) = \vec{w}$ . Donc  $a = b = c = 1$ .

(On peut aussi résoudre directement le système  $2a + b + 2c = 5$ ,  $-2a + 2b + c = 1$ ,  $a + 2b - 2c = 1$ , qui a pour unique solution  $(1, 1, 1)$ .)